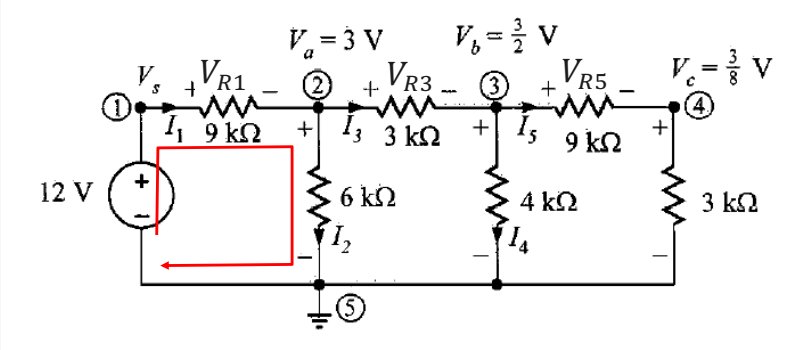
Análisis de nodos

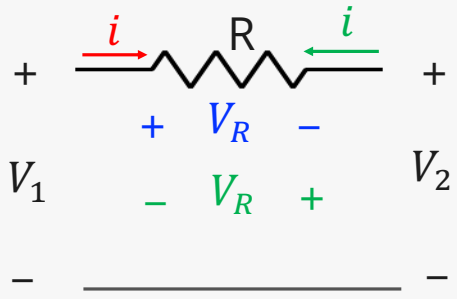


$$-V_1 + V_{R1} + V_2 = 0$$

$$V_{R1} = V_1 - V_2$$

$$V_{R3} = V_2 - V_3$$

$$V_{R5} = V_3 - V_4$$



$$i = \frac{V_R}{R}$$

$$V_R = V_1 - V_2$$

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

$$i = \frac{V_2 - V_1}{R}$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{9k}$$

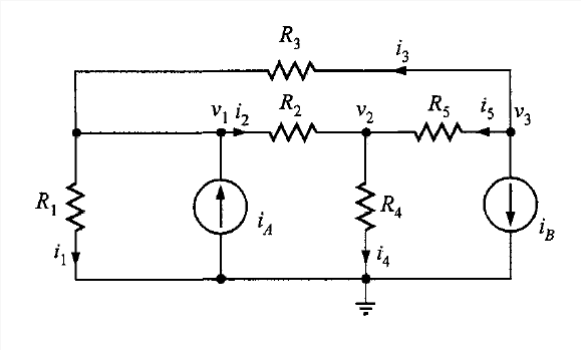
$$I_3 = \frac{V_2 - V_3}{3k}$$

$$I_5 = \frac{V_3 - V_4}{9k}$$

$$I_2 = \frac{V_2 - V_5}{6k} = \frac{V_2}{6k}$$

$$I_4 = \frac{V_3 - V_5}{4k} = \frac{V_3}{4k}$$

Caso 1.- Circuitos que sólo contienen fuentes de corriente independientes.



Aplicando LCK:

① $i_1 + i_2 - i_3 - i_A = 0$

Aplicando ley de Ohm:

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} - \frac{V_3 - V_1}{R_3} = i_A$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 - \frac{1}{R_3} V_3 = i_A \ldots\ldots (1)$$

② $-i_2 + i_4 - i_5 = 0$

$$-\frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_4} - \frac{V_3 - V_2}{R_5} = 0$$

$$-\frac{1}{R_2} V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_2 - \frac{1}{R_5} V_3 = 0 \ldots\ldots (2)$$

③ $i_3 + i_5 + i_B = 0$

$$\frac{V_3 - V_1}{R_3} + \frac{V_3 - V_2}{R_5} = -i_B$$

$$-\frac{1}{R_3} V_1 - \frac{1}{R_5} V_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) V_3 = -i_B \ldots\ldots (3)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

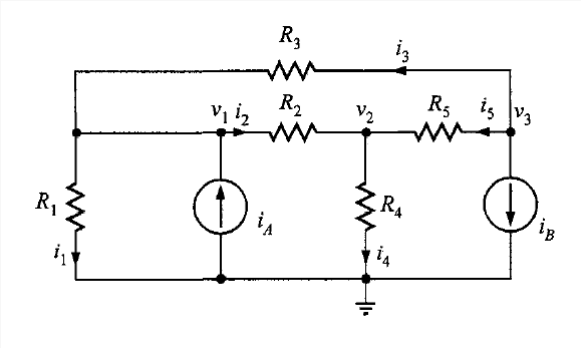
$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 - \frac{1}{R_3} V_3 = i_A$$

$$-\frac{1}{R_2} V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_2 - \frac{1}{R_5} V_3 = 0$$

$$-\frac{1}{R_3} V_1 - \frac{1}{R_5} V_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) V_3 = -i_B$$

N-1 Ecuaciones

Caso 1.- Circuitos que sólo contienen fuentes de corriente independientes.



$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_1-\frac{1}{R_2}V_2-\frac{1}{R_3}V_3=i_A$$

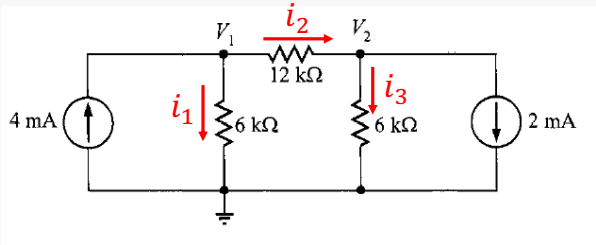
$$-\frac{1}{R_2}V_1+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)V_2-\frac{1}{R_5}V_3=0$$

$$-\frac{1}{R_3}V_1-\frac{1}{R_5}V_2+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)V_3=-i_B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_A \\ 0 \\ -i_B \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Ejemplo.- Escriba las ecuaciones de nodo para el circuito que se muestra en la figura siguiente:



Solución

① $-4mA + i_1 + i_2 = 0$

$$\frac{V_1}{6k} + \frac{V_1 - V_2}{12k} = 4mA$$

$$\left(\frac{1}{6k} + \frac{1}{12k}\right)V_1 - \frac{1}{12k}V_2 = 4mA \ldots\ldots (1)$$

② $-i_2 + i_3 + 2mA = 0$

$$-\frac{V_1 - V_2}{12k} + \frac{V_2}{6k} = -2mA$$

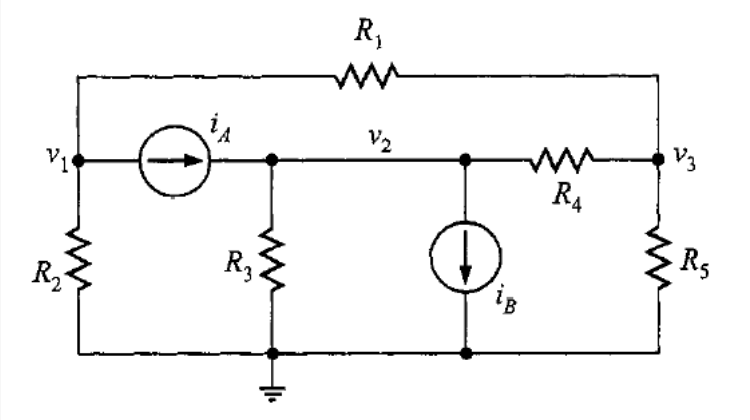
$$-\frac{1}{12k}V_1 + \left(\frac{1}{12k} + \frac{1}{6k}\right)V_2 = -2mA \ldots\ldots (2)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6k} + \frac{1}{12k} & -\frac{1}{12k} \\ -\frac{1}{12k} & \frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4mA \\ -2ma \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Ejemplo.- Escriba las ecuaciones de nodo, por inspección, para el circuito que se muestra en la figura siguiente:



Solución

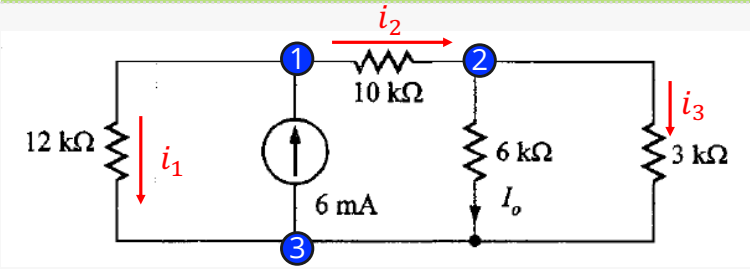
① $$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_1 - 0V_2 - \frac{1}{R_1}V_3 = -i_A \ldots\ldots(1)$$

② $$-0V_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_2 - \frac{1}{R_4}V_3 = i_A - i_B \ldots\ldots(2)$$

③ $$-\frac{1}{R_1}V_1 - \frac{1}{R_4}V_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)V_3 = 0 \ldots\ldots(3)$$

Ejemplo

Ejemplo.- Encuentre I_0 usando análisis nodal



Solución

① $i_1 + i_2 - 6mA = 0$

$$\frac{V_1}{12k} + \frac{V_1 - V_2}{10k} = 6mA$$

$$\left(\frac{1}{12k} + \frac{1}{10k}\right)V_1 - \frac{1}{10k}V_2 = 6mA$$

$$\frac{11}{60k}V_1 - \frac{1}{10k}V_2 = 6mA \ldots\ldots (1)$$

② $-i_2 + I_0 + i_3 = 0$

$$-\frac{V_1 - V_2}{10k} + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2}{3k} = 0$$

$$-\frac{1}{10k}V_1 + \left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{3k}\right)V_2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

$$-\frac{1}{10k}V_1 + \frac{6}{10k}V_2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

Por lo tanto el sistema es:

$$11V_1 - 6V_2 = 360$$

$$-V_1 + 6V_2 = 0$$

Resolviendo el sistema:

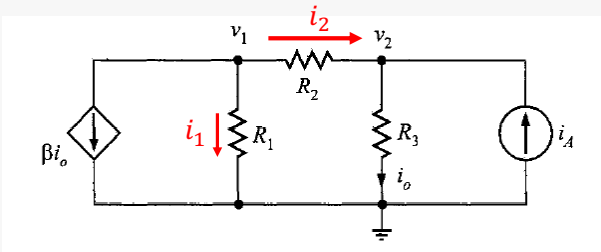
$$V_1 = 36\ volts$$

$$V_2 = 6\ volt$$

Finalmente:

$$I_0 = \frac{V_2}{6k} = \frac{6V}{6k} = 1\text{mA}$$

Caso 2.- Circuitos que contienen fuentes de corriente independientes y dependientes.



Aplicando LCK:

① $\beta i_0 + i_1 + i_2 = 0$

Aplicando ley de Ohm:

$$\beta\left(\frac{V_2}{R_3}\right) + \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_3}\right)V_2 = 0 \ldots\ldots (1)$$

② $-i_2 + i_0 - i_A = 0$

$$-\frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} - i_A = 0$$

$$-\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 = i_A \ldots\ldots (2)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

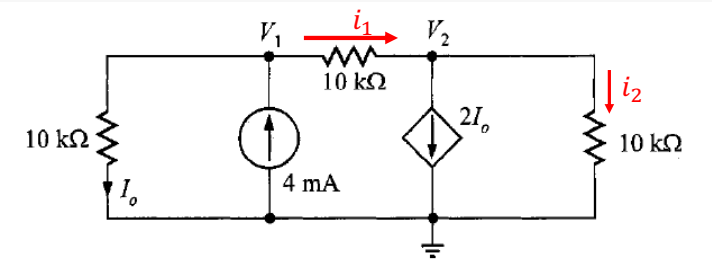
$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_3}\right)V_2 = 0$$

$$-\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 = i_A$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & -\left(\frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_3}\right) \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_A \end{bmatrix}$$

Ejemplo



Aplicando LCK:

① $I_0 - 4mA + i_1 = 0$

Aplicando ley de Ohm:

$$\frac{V_1}{10k} + \frac{V_1 - V_2}{10k} = 4mA$$

$$\left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k}\right)V_1 - \frac{1}{10k}V_2 = 4mA \ldots\ldots (1)$$

② $-i_1 + 2I_0 + i_2 = 0$

$$-\frac{V_1 - V_2}{10k} + 2\left(\frac{V_1}{10k}\right) + \frac{V_2}{10k} = 0$$

$$-\left(\frac{1}{10k} - \frac{2}{10k}\right)V_1 + \left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k}\right)V_2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

$$\left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k}\right)V_1 - \frac{1}{10k}V_2 = 4mA$$
$$-\left(\frac{1}{10k} - \frac{2}{10k}\right)V_1 + \left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k}\right)V_2 = 0$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k}\right) & -\frac{1}{10k} \\ -\left(\frac{1}{10k} - \frac{2}{10k}\right) & \left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{10k}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4ma \\ 0 \end{bmatrix}$$

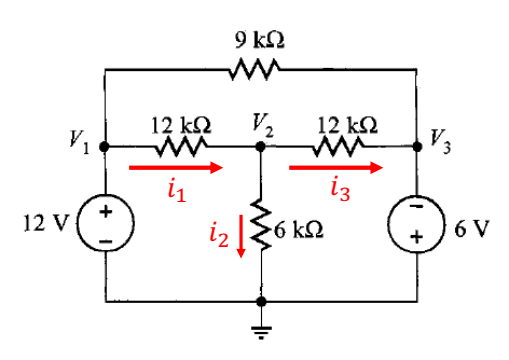
Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$2V_1 - V_2 = 40\ volts$$
$$V_1 + 2V_2 = 0$$

Por lo tanto:

$$V_1 = 16\ volts$$
$$V_2 = -8\ volts$$

Caso 3.- Circuitos que contienen fuentes de voltaje independientes.



$V_1 = 12\ volts$

$V_3 = -6\ volts$

Aplicando LCK:

② $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$

Aplicando ley de Ohm:

$$-\frac{V_1 - V_2}{12k} + \frac{V_2}{6K} + \frac{V_2 - V_3}{12k} = 0$$

$$-\frac{1}{12k}V_1 + \left(\frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{12k}\right)V_2 - \frac{1}{12k}V_3 = 0 \ldots\ldots (1)$$

Multiplicando por 12k :

$$-V_1 + 4V_2 - V_3 = 0$$

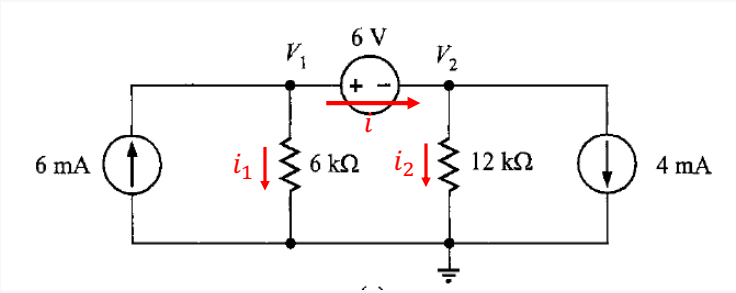
Sustituyendo $V_1\ y\ V_3$:

$$V_2 = \frac{V_3 + V_1}{4}$$

$$V_2 = \frac{-6 + 12}{4}$$

$$V_2 = \frac{3}{2}\ volt$$

Caso 3.- Circuitos que contienen fuentes de voltaje independientes.



Aplicando LCK:

① $-6mA + i_1 + i = 0$

$$\frac{V_1}{6k} + i = 6mA$$

② $-i + i_2 + 4mA = 0$

$$-i + \frac{V_2}{12k} = -4mA$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

$$\frac{V_1}{6k} + i = 6mA$$
$$-i + \frac{V_2}{12k} = -4mA$$

Sumando las ecuaciones:

$$\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12k} = 2mA \ldots.(I)$$

Del circuito:

$$V_1 - V_2 = 6\ volts \ldots.(II)$$

De esta manera:

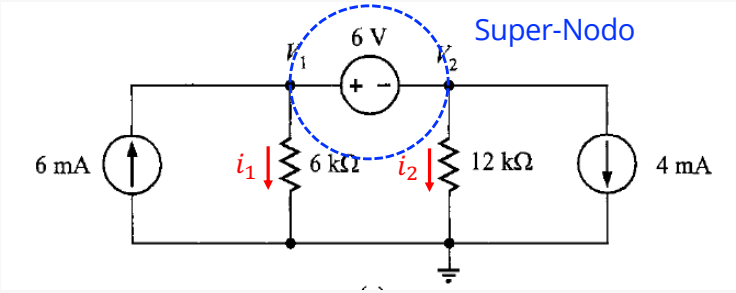
$$2V_1 + V_2 = 24$$
$$V_1 - V_2 = 6$$

Resolviendo el sistema:

$$V_1 = 10\ volts$$

$$V_2 = 4\ volts$$

Caso 3.- Circuitos que contienen fuentes de voltaje independientes.



Analizando el super-nodo:

$$V_1 - V_2 = 6\ volts \ldots.(1)$$ Ecuación de restricción del SN

Aplicando LCK al SN:

$$-6mA + i_1 + i_2 + 4mA = 0$$

$$i_1 + i_2 = 2mA$$

$$\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12K} = 2mA \ldots.(2)$$ Ecuación del SN

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

$$V_1 - V_2 = 6$$
$$2V_1 + V_2 = 24$$

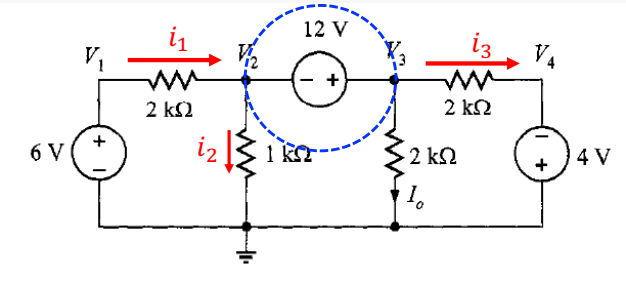
Resolviendo el sistema:

$$V_1 = 10\ volts$$

$$V_2 = 4\ volts$$

Ejemplo

Determine el valor de I_0



$V_1 = 6\ volts$

$V_4 = -4\ volts$

Analizando el super-nodo:

$V_3 - V_2 = 12\ volts \ldots.(1)$ Ecuación de restricción del SN

Aplicando LCK al SN:

$-i_1 + i_2 + I_0 + I_3 = 0$

$$-\frac{V_1 - V_2}{2k} + \frac{V_2}{1K} + \frac{V_3}{2k} + \frac{V_3 - V_4}{2k} = 0$$

$$-\frac{1}{2k}V_1 + \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{1k}\right)V_2 + \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}\right)V_3 - \frac{1}{2k}V_4 = 0$$

Multiplicando por 2k y sustituyendo los valores de $V_1\ y\ V_4$:

$$-6 + 3V_2 + 2V_3 - (-4) = 0$$

$3V_2 + 2V_3 = 2 \ldots.(2)$ Ecuación del SN

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

$$-V_2 + V_3 = 12$$
$$3V_2 + 2V_3 = 2$$

Resolviendo el sistema:

$V_2 = -4.4\ volts$

$V_3 = 7.6\ volts$

Finalmente:

$$I_0 = \frac{V_3}{2k} = \frac{7.6}{2k} = 3.8\ mA$$