Frecuencia Compleja

Circuitos Eléctricos II

Dr. Andrés Ferreyra Ramírez

Introducción

Frecuencia compleja constituye un notable concepto unificador que permitirá integrar en un solo paquete todas las técnicas analíticas:

El análisis de circuitos excitados por :

Funciones exponenciales forzadas

Funciones senoidales forzadas amortiguadas exponencialmente

La respuesta completa

La respuesta forzada

El análisis de circuitos resistivos

El análisis senoidal en estado estable

El análisis transitorio

Introducción

Sea la función:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} cos(\omega t + \theta)$$

Si $\sigma = \omega = 0$

$$v(t) = V_m cos(\theta) = V_0$$

Si $\sigma = 0$

$$v(t) = V_m cos(\omega t + \theta)$$

Si $\omega = 0$

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}$$

Definición

Cualquier función que puede escribirse de la forma:

$$f(t) = Ke^{st}$$

Donde ***K*** y ***s*** son constantes complejas (independientes del tiempo) se caracteriza por la frecuencia compleja ***s***.

El caso de cd

$$v(t) = V_0$$

Se debería escribir de la forma:

$$v(t) = V_0 e^{st}$$

$$v(t) = V_0 e^{(0)t}$$

En consecuencia se concluye que la frecuencia compleja de una corriente o de una tensión de cd es cero (es decir, s=0)

El caso exponencial

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

$$v(t) = V_0 e^{st}$$

Que ya esta en la forma requerida. La frecuencia compleja de dicha tensión es entonces σ (esto es, s=σ+j0)

El caso de senoidal

$$v(t) = V_m cos(\omega t + \theta)$$

$$v(t) = V_0 e^{st}$$

Utilizando:

$$cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}\right]$$

$$v(t) = \frac{1}{2}V_m\left[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}\right]$$

$$v(t) = \left(\frac{1}{2}V_m e^{j\theta}\right) e^{j\omega t} + \left(\frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}\right) e^{-j\omega t}$$

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Donde:

$$s_1 = j\omega$$

$$s_2 = -j\omega$$

$$s_2 = s_1^*$$

y

$$K_1 = \frac{1}{2}V_m e^{j\theta}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}$$

$$K_2 = K_1^*$$

El caso senoidal amortiguado exponencialmente

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} cos(\omega t + \theta)$$

$$v(t) = V_0 e^{st}$$

Utilizando:

$$cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}\right]$$

$$v(t) = \frac{1}{2} V_m e^{\sigma t}\left[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}\right]$$

$$v(t) = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega)t} + \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta} e^{(\sigma-j\omega)t}$$

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Donde:

$$s_1 = \sigma + j\omega$$

$$s_2 = \sigma - j\omega$$

$$s_2 = s_1^*$$

y

$$K_1 = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta}$$

$$K_2 = K_1^*$$

Ejemplo

$$v(t) = 100 \qquad s = 0$$

$$v(t) = 5e^{-2t} \qquad s = -2 + j0$$

$$v(t) = 2\sin 500t \qquad s_1 = j500, \quad s_2 = s_1^* = -j500$$

$$v(t) = 4e^{-3t}\sin(6t + 10) \qquad s_1 = -3 + j6, \quad s_2 = s_1^* = -3 - j6$$

La función de exitación senoidal amortiguada

Sea

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} cos(\omega t + \theta)$$

Puede expresarse en términos de la frecuencia compleja *s* haciendo uso de la identidad de Euler:

$$v(t) = Re\left(V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t+\theta)}\right)$$

$$v(t) = Re\left(V_m e^{\sigma t} e^{j(-\omega t-\theta)}\right)$$

$$v(t) = Re\left(V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t+\theta)}\right)$$
$$v(t) = Re\left(V_m e^{\sigma t} e^{j\omega t} e^{j\theta}\right)$$
$$v(t) = Re\left(V_m e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega)t}\right)$$
$$v(t) = Re\left(V_m e^{j\theta} e^{st}\right)$$

$$V = V_m e^{j\theta} = V_m\angle\theta \qquad s = \sigma + j\omega$$

$$v(t) = 60e^{-2t} cos(4t + 10)$$
$$v(t) = Re\left(60e^{-2t} e^{j(4t+10)}\right)$$
$$v(t) = Re\left(60e^{-2t} e^{j4t} e^{j10}\right)$$
$$v(t) = Re\left(60e^{j10} e^{(-2+j4)t}\right)$$
$$v(t) = Re\left(60e^{j10} e^{st}\right)$$
$$V = 60e^{j10} = 60\angle 10$$
$$S=-2+j4$$

Sea

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} cos(\omega t + \theta)$$
$$i(t) = I_m e^{\sigma t} cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = Re\left(V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t+\theta)}\right)$$
$$v(t) = Re\left(V_m e^{\sigma t} e^{j\omega t} e^{j\theta}\right)$$
$$v(t) = Re\left(V_m e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega)t}\right)$$
$$v(t) = Re\left(V_m e^{j\theta} e^{st}\right) = Ve^{st}$$
$$V = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \Theta$$
$$s=\sigma + j\omega$$

$$i(t) = Re\left(I_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t+\phi)}\right)$$
$$i(t) = Re\left(I_m e^{\sigma t} e^{j\omega t} e^{j\phi}\right)$$
$$i(t) = Re\left(I_m e^{j\phi} e^{(\sigma+j\omega)t}\right)$$
$$i(t) = Re\left(I_m e^{j\phi} e^{st}\right) = Ie^{st}$$
$$I = I_m e^{j\phi} = I_m \angle \phi$$
$$s=\sigma + j\omega$$

Para un inductor:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

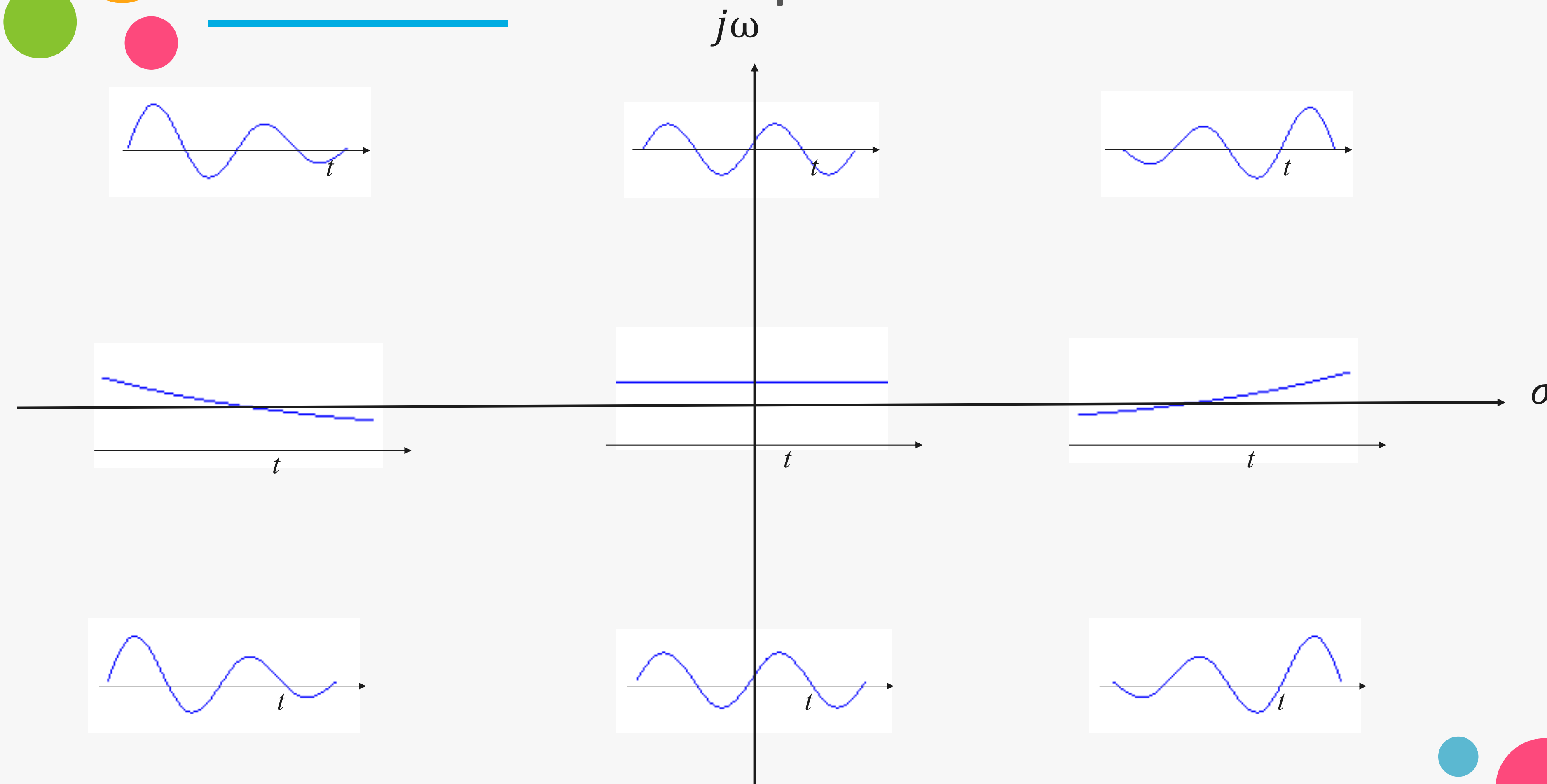
$$Re(Ve^{st}) = Re\left(L\frac{d}{dt}(Ie^{st})\right)$$

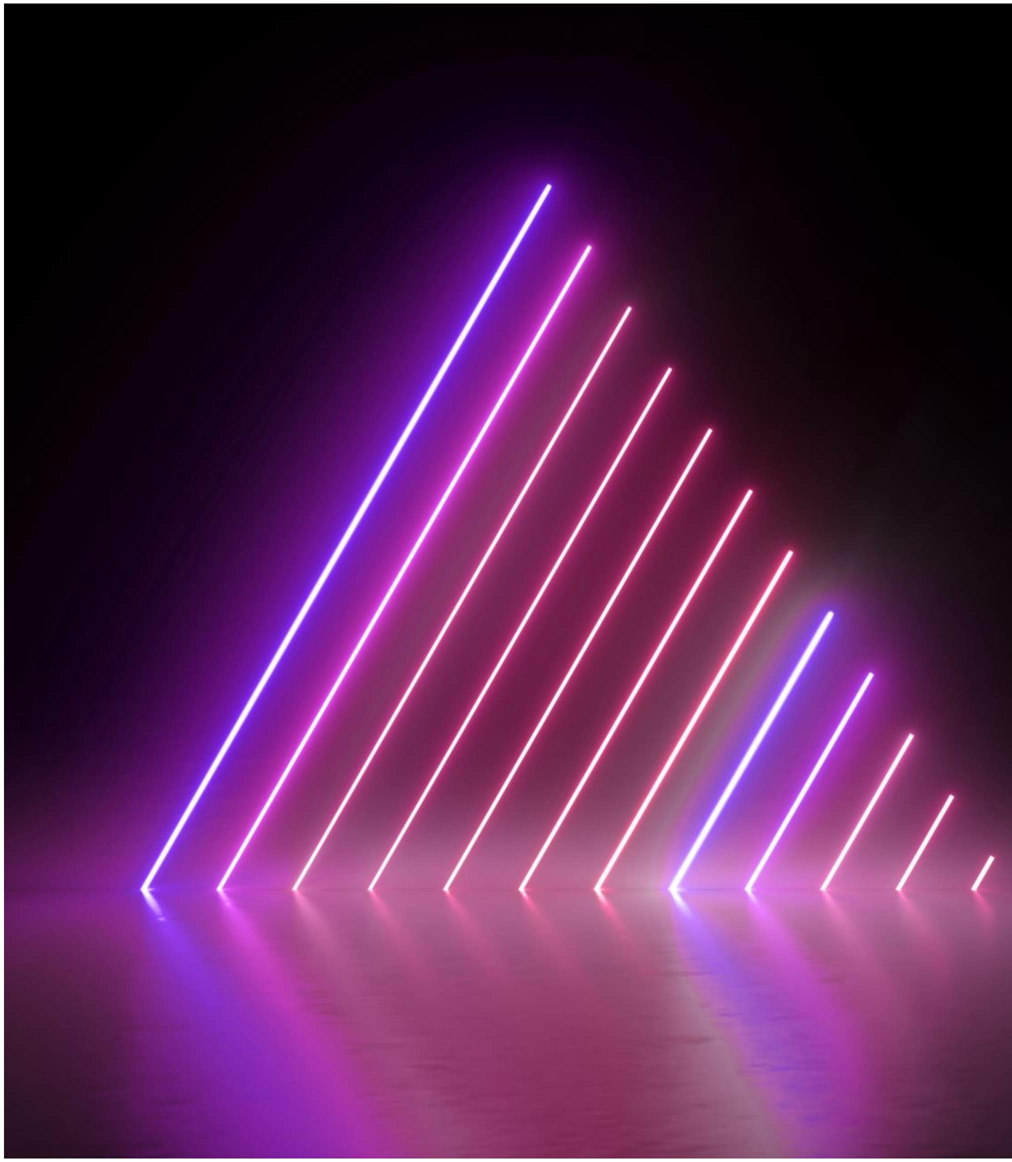
$$Ve^{st} = sLIe^{st}$$
$$V = sLI$$
$$y\ si$$
$$Z = \frac{V}{I}$$
$$entonces$$
$$Z_L = sL$$

Z(s) y Y(s)

	R	L	C
Z(s)	R	sL	1/sC
Y(s)	1/R	1/sL	sC

Naturaleza de la respuesta

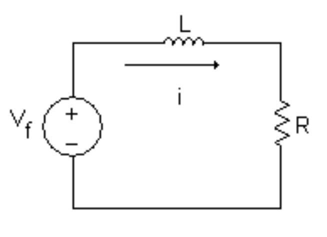




Respuesta en frecuencia como function de σ

- Trabajar en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Laplace, permite considerer una amplia gama de circuitos variantes en el tiempo, pues elimina la necesidad de trabajar con ecuaciones integrodifenciales en razon de que solo se procede de forma algebraica. Sin embargo, Laplace tiene la desventaja de no ser un proceso muy visual.
- Existe una cantidad enorme de información contenida en la gráfica de polos y ceros de una respuesta forzada.
- En esta sección se considera la forma en que puede obtenerse la respuesta completa de un circuito –natural más forzada- siempre y cuando se conozcan las condiciones iniciales.
- La ventaja de este método es que establece una relación intuitiva entre la ubicación de las frecuencias criticas , fácilmente visualizables a través de la gráfica de polos-ceros y la respuesta deseada.

Respuesta en frecuencia en función de σ



La respuesta completa esta dada por:

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t)$$

Si trabajamos en el dominio de la frecuencia para determinar la respuesta forzada $i_f(t)$:

$$I_f(s) = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + sL}$$

Si trabajamos con:

$$\omega = 0$$

Esto implica que:

$$s = \sigma + j0$$

Que corresponde a una fuente del tipo:

$$V_f = V_m e^{\sigma t}$$

Por lo tanto:

$$I_f(s) = \frac{V_m}{R + sL} = \frac{V_m}{L} \frac{1}{s + R/L}$$

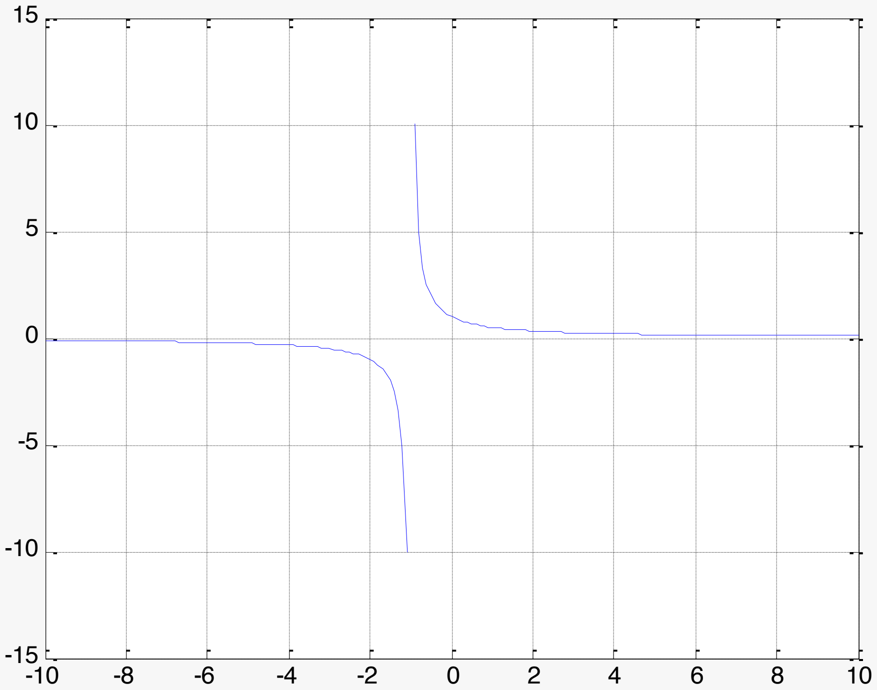
Donde la función de transferencia es:

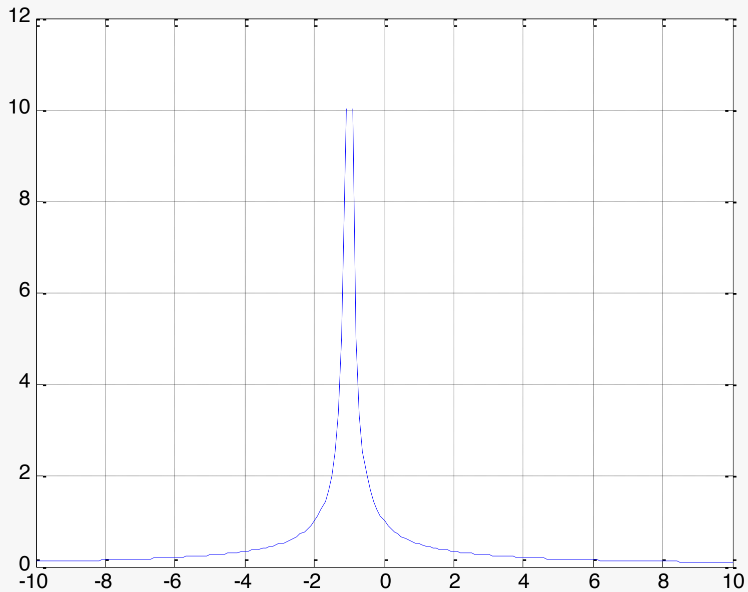
$$\frac{I_f(s)}{V_f(s)} = \boldsymbol{H}(s) = \frac{1}{L\left(\sigma + {}^{R}/_{L}\right)}$$

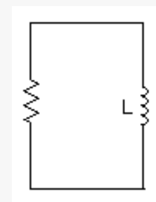
Si $R = L = 1$, entonces:

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{1}{\sigma + 1}$$

Graficando:



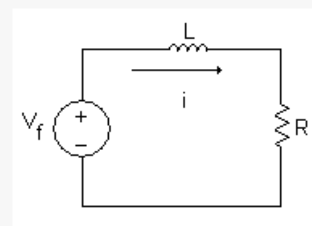




$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = 0$$

$$i_L(t)_{natural} = Ae^{-at}$$



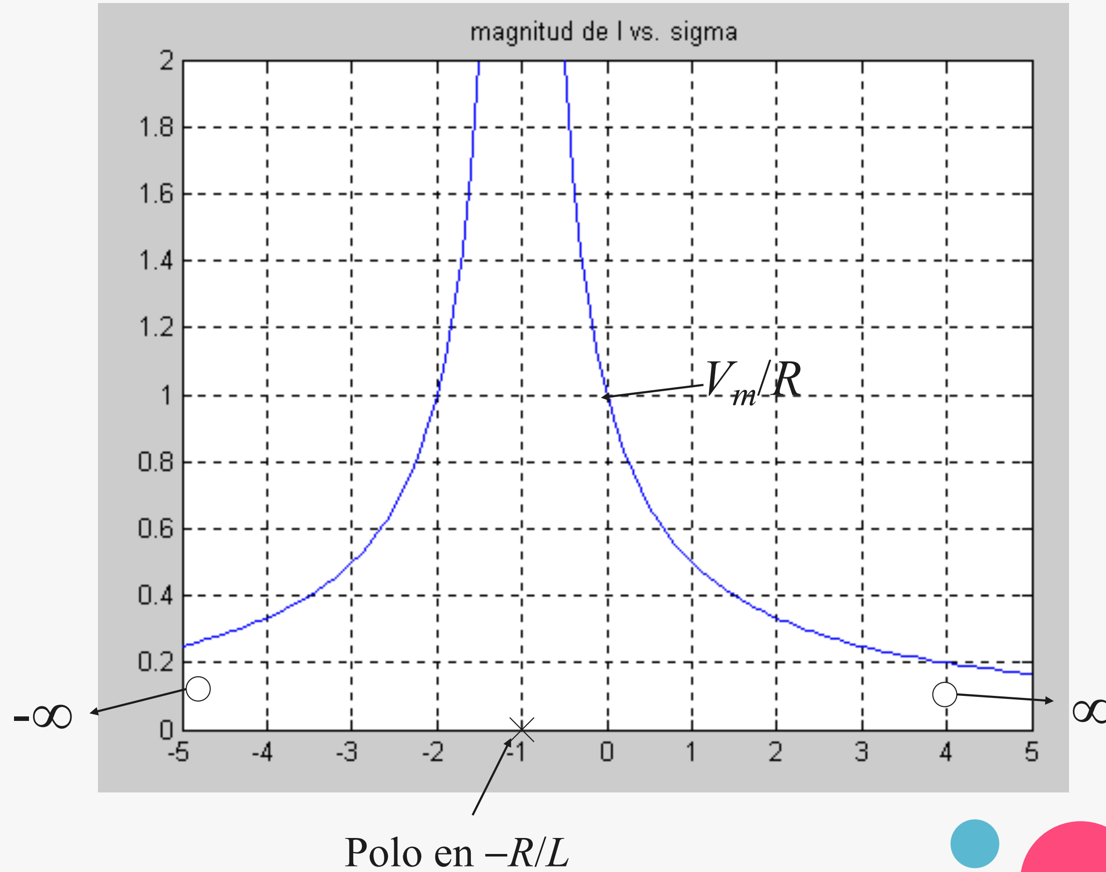
$$V_f = 0$$

$$\boxed{i_L(t)_{natural} = Ae^{-at} = i_L(t)_{forzada}}$$

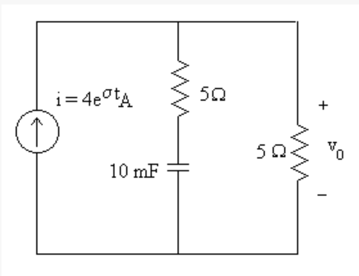
Circuito RL

$$I = \frac{V_m}{L} = \frac{1}{\sigma + R/L}$$

```
%respuesta en función de sigma,
circuito RL
R = 1;
L = 1;
Vm = 1;
sigma = -5:0.1:5;
I = (Vm/L)./(sigma+R/L);
plot(sigma,abs(I));
axis([-5,5,0,2]);
grid
title('magnitud de I vs. sigma');
```



Ejemplo



$$Z_{ent} = 5 || \left(5 + \frac{1}{0.01\sigma}\right) = \frac{5\left(5 + \frac{100}{\sigma}\right)}{5 + 5 + \frac{100}{\sigma}}$$

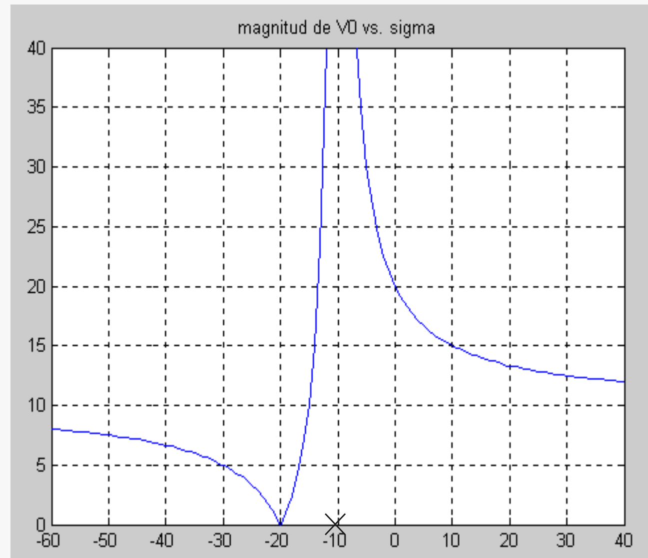
$$Z_{ent} = 2.5\frac{\sigma + 20}{\sigma + 10}$$

$$V_0 = \frac{10(\sigma + 20)}{(\sigma + 10)}$$

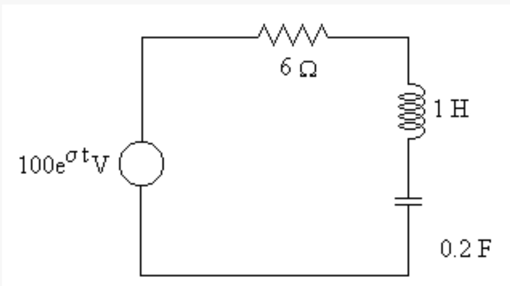
$$v(t) = \frac{10(\sigma + 20)}{(\sigma + 10)}e^{\sigma t}$$

Cero en –20

Polo en –10



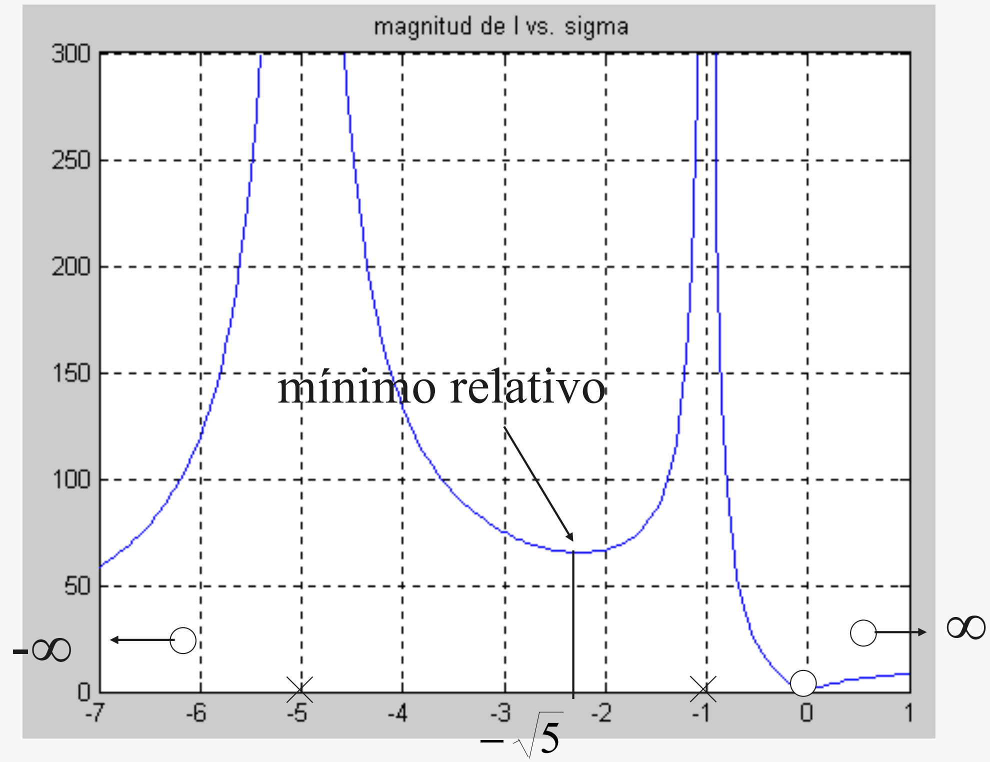

```
%respuesta en función de sigma, circuito RC
sigma = -60:1:40;
V0 = 10*(sigma + 20)./(sigma + 10);
plot(sigma,abs(V0));
axis([-60,40,0,40]);
grid
title('magnitud de V0 vs. sigma');
```



$$I = 100\frac{\sigma}{(\sigma+1)(\sigma+5)}$$

$$i_n = Ae^{-t} + Be^{-5t}$$

```
%respuesta en función de sigma, circuito RLC
sigma = -7:0.05:1;
I = 100*sigma./((sigma + 1).*(sigma + 5));
plot(sigma,abs(I));
axis([-7,1,0,300]);
grid
title('magnitud de I vs. sigma');
```



Ejemplo

```
% +---R1---+---R2---+
% |        |        |
% Ven      C1       C2  Vsal
% |        |        |
% +--------+--------+
% Encontrar Vsal/Ven a) frecuencias
criticas
% b) evaluar en
% sigma = -200, -80, -40, 0 Np/s c)
graficar

% R1 = 20000;
% R2 = 10000;
% C1 = 2.5e-6;
% C2 = 2e-6;

sigma = -120:1:20;
%
h = 1000./((sigma+100).*(sigma+10));
plot(sigma,abs(h))
grid
```

$$\frac{V_{sal}}{V_{ent}} = \frac{\sigma}{(\sigma + 100)(\sigma + 10)}$$

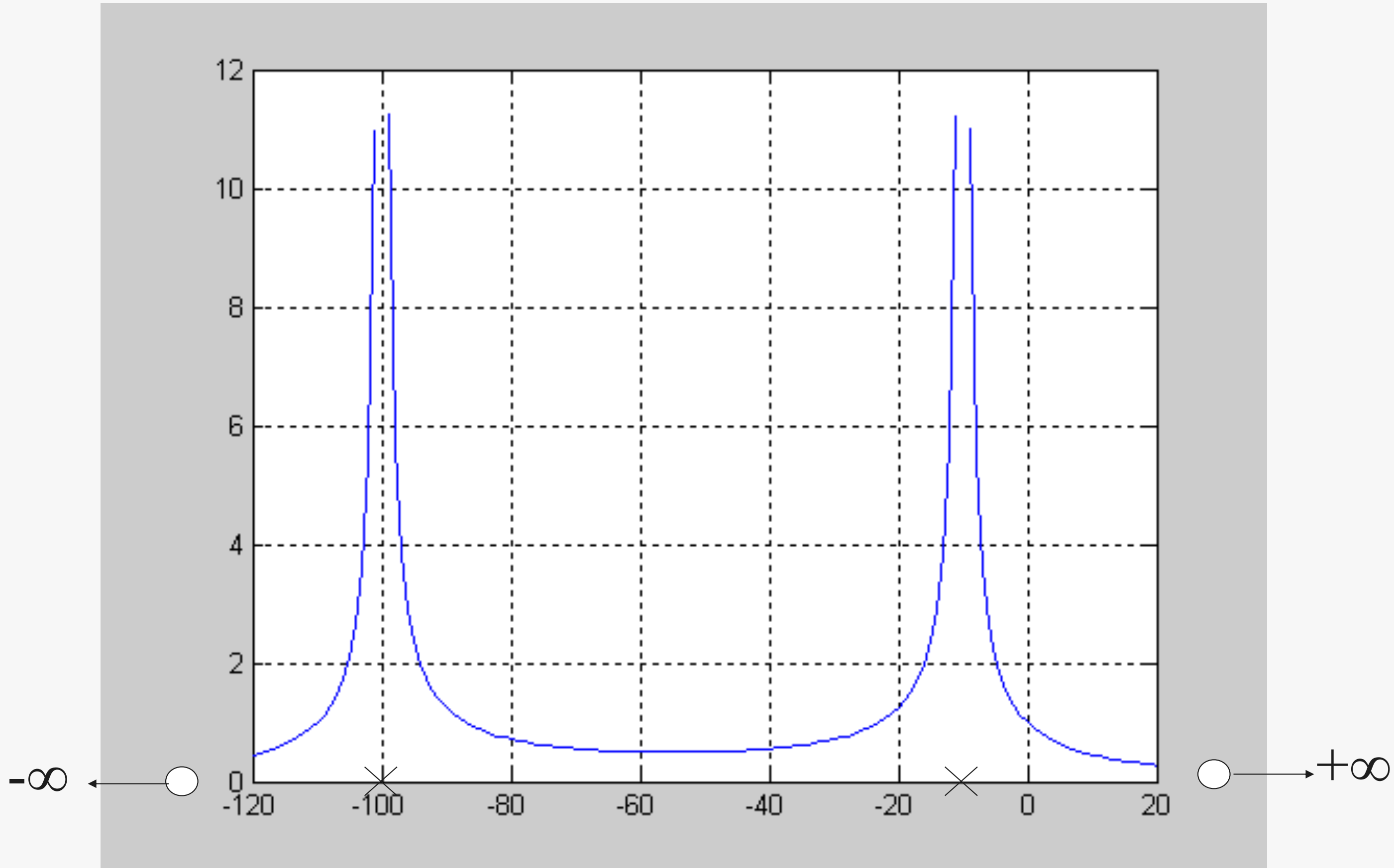
Frecuencias críticas:

$s = -10, -100, \pm\infty$

polos: $-10, -100$

ceros: $\pm\infty$

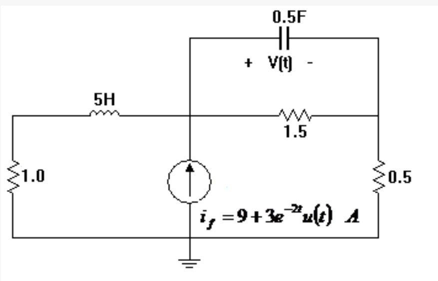
```
h(-200)=  0.0526
h(-80) = -0.7143
h(-40) = -0.5556
h(0)   =  1.0000
```



12
10
8
6
4
2
0
-120
-100
-80
-60
-40
-20
0
20
-∞
+∞

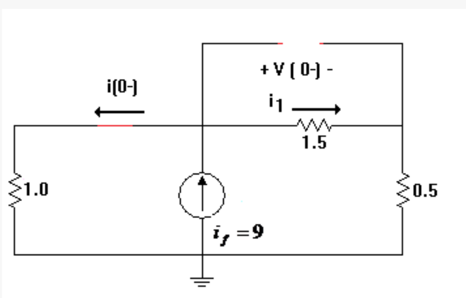
Ejemplo

Para el circuito de la figura siguiente, determine $V(t)$ para $t > 0$.



Solución:

Para t < (0) [Estado estable]

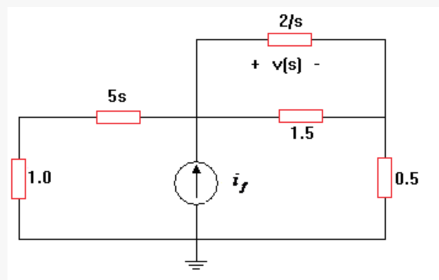


$$i_L(0^-) = \frac{9(1.5+0.5)}{1.5+0.5+1} = \frac{18}{3} = 6A$$

$$v_c(0^-) = 1.5 i_1 = 1.5\big(9 - i_L(0^-)\big) = 4.5 Volts$$

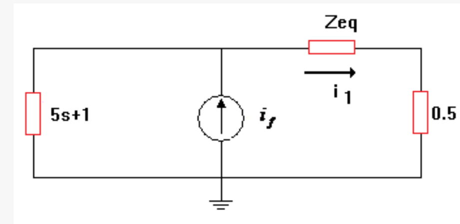
Para t > 0:

Transformando el circuito al dominio de la frecuencia compleja



Reduciendo el circuito

$$Z_{eq} = \frac{\left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{2}{s}+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{s}}{\frac{3s+4}{2s}} = \frac{6}{3s+4}$$



$$i_1 = \frac{(5s+1)i_f}{(5s+1) + Z_{eq} + 0.5} = \frac{(5s+1)i_f}{(5s+1) + \frac{6}{3s+4} + 0.5}$$

$$i_1 = \frac{(5s+1)i_f}{5s + \frac{6}{3s+4} + \frac{3}{2}} = \frac{(5s+1)i_f}{\frac{6}{3s+4} + \frac{10s+3}{2}}$$

$$i_1 = \frac{(5s+1)i_f}{\frac{12 + (10s+3)(3s+4)}{2(3s+4)}}$$

$$i_1 = \frac{2(3s+4)(5s+1)i_f}{12 + 30s^2 + 40s + 9s + 12}$$

Ejemplo

$$i_1 = \frac{2(3s+4)(5s+1)i_f}{12+30s^2+40s+9s+12}$$

$$i_1 = \frac{2(3s+4)(5s+1)i_f}{30s^2+49s+24}$$

Por otra parte

$$V(s) = Z_{eq}i_1$$

$$V(s) = \frac{6}{3s+4}\left[\frac{2(3s+4)(5s+1)i_f}{30s^2+49s+24}\right]$$

Por lo tanto la función de transferencia es:

$$\frac{V(s)}{i_f} = \frac{60s+12}{30s^2+49s+24}$$

Calculo de la respuesta Natural:

$$30s^2+49s+24=0$$

$$s_{1,2} = -0.817 \pm j0.365$$

Se trata de un circuito sub-amortiguado cuya respuesta natural es:

$$V_n(t) = e^{-0.817t}[B_1 \cos 0.365t + B_2 \sin 0.365t]$$

Calculo de la respuesta Forzada:

$$V(s) = \frac{(60s+12)i_f}{30s^2+49s+24}$$

y :

$$i_f = 9 + 3e^{-2t}\ Amp$$

Utilizando superposición

Para:

$$i_{f_1} = 9$$

$$i_{f_1} = 9\angle 0, \qquad s = 0$$

Por lo tanto:

$$V_{f_1}(s) = \frac{[60(0)+12]9\angle 0}{30(0)^2+49(0)+24}$$

$$V_{f_1}(s) = \frac{12(9)}{24} = \frac{9}{2}$$

Regresando al dominio del tiempo:

$$V_{f_1}(t) = \frac{9}{2}$$

Para:

$$i_{f_2} = 3e^{-2t}$$

$$i_{f_2} = 3\angle 0, \quad s = -2 + j0$$

Por lo tanto:

$$V_{f_2}(s) = \frac{[60(-2) + 12]3\angle 0}{30(-2)^2 + 49(-2) + 24}$$

$$V_{f_2}(s) = \frac{-324}{46} = \frac{-162}{23}$$

Regresando al dominio del tiempo:

$$\boxed{V_{f_2}(t) = \frac{-162}{23} e^{-2t}}$$

Por lo tanto la respuesta forzada es:

$$V_f(t) = V_{f_1}(t) + V_{f_2}(t)$$

$$\boxed{V_f(t) = \frac{9}{2} + \frac{-162}{23} e^{-2t}}$$

Calculo de la respuesta completa:

$$V(t) = V_f(t) + V_n(t)$$

$$V(t) = \frac{9}{2} + \frac{-162}{23} e^{-2t} + e^{-0.817t}[B_1 \cos 0.365t + B_2 \sin 0.365t]$$

Ahora aplicando C.I para determinar el valor de las constantes:

$$V(0) = \frac{9}{2} + \frac{-162}{23} e^{-2(0)} + e^{-0.817t}[B_1 \cos 0.365(0) + B_2 \sin 0.365(0)]$$

$$V(0) = \frac{9}{2} + \frac{-162}{23} + B_1 = 4.5 \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{162}{23}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{324}{23} e^{-2t} + e^{-0.817t}[-0.365B_1 sin0.365t + 0.365B_2 cos0.365t]$$
$$+[B_1 cos0.365t + B_2 sin0.365t]\ (-0.817e^{-0.817t})$$

$$\frac{dV(0)}{dt} = \frac{324}{23} + 0.365\, B_2 - 0.817B_1 = ? \qquad con \qquad \frac{dV(0)}{dt} = 6 \qquad B_2 = -6.390$$

$$\boxed{V(t) = \frac{9}{2} - \frac{162}{23} e^{-2t} + e^{-0.817t}\left[\frac{162}{23} cos0.365t - 6.390 sin0.365t\right] Volts}$$