Solución de Circuitos Eléctricos via la Transformada de Laplace

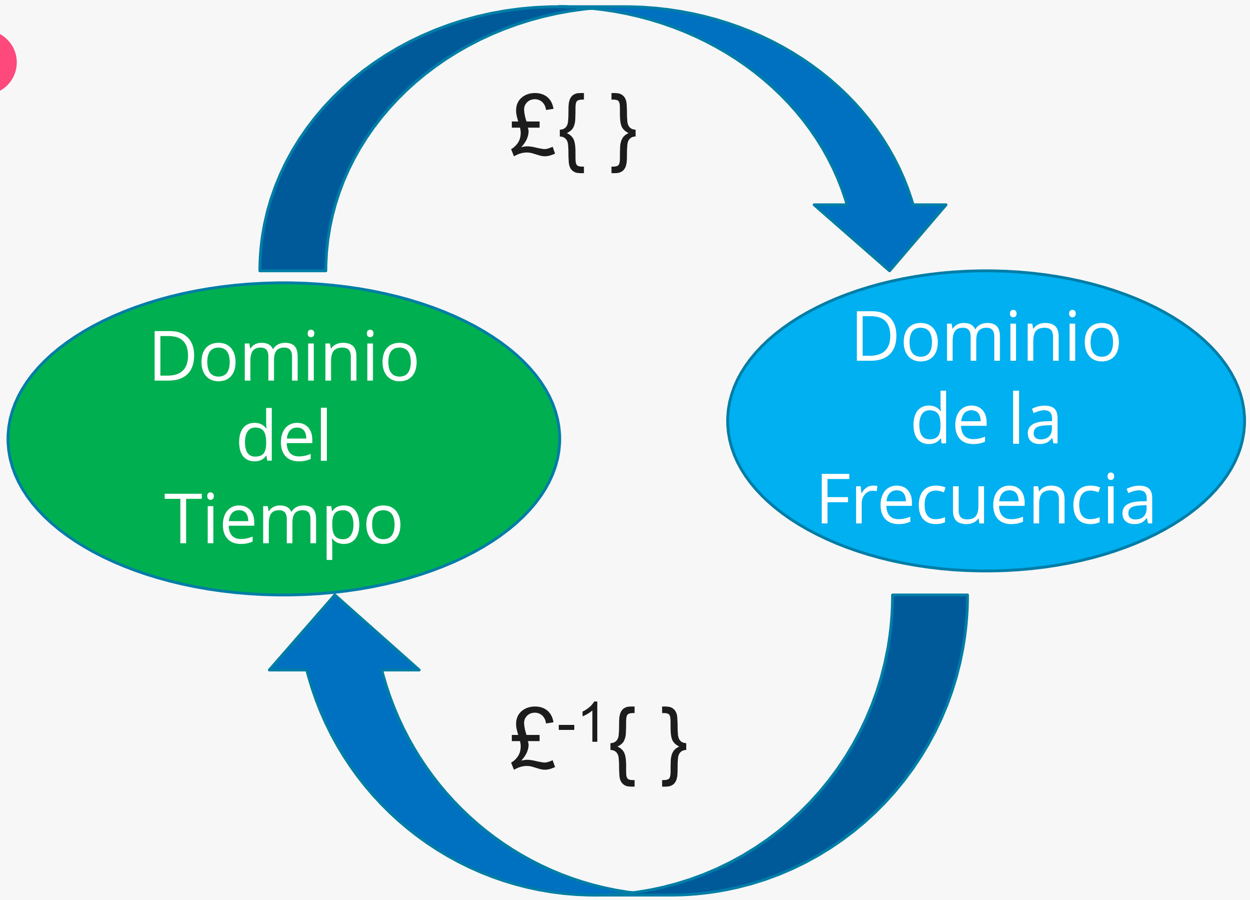
Circuitos Eléctricos II

Dr. Andrés Ferreyra Ramírez

Introducción

La transformada de Laplace es una herramienta importante para el análisis de circuitos lineales de parámetros concentrados, por que:

1. Facilita el análisis de circuitos que sólo se pueden describir con dos ecuaciones diferenciales simultáneas o más.
2. Simplifica el uso de varias fuentes.
3. Simplifica el uso de las condiciones iniciales, las cuales están implícitas en el método de análisis.
4. Fortalece la relación existente entre el comportamiento de un circuito en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.



$\pounds\{\ \}$
Dominio del Tiempo
Dominio de la Frecuencia
$\pounds^{-1}\{\ \}$

Transformada de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	$u_0(t)$	$1/s$
2	$tu_0(t)$	$1/s^2$
3	$t^n u_0(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\delta(t)$	1
5	$\delta(t-a)$	e^{-as}
6	$e^{-at}u_0(t)$	$\frac{1}{s+a}$
7	$t^n e^{-at}u_0(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\sin \omega t \ u_0(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cos \omega t \ u_0(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10	$e^{-at}\sin \omega t \ u_0(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega}$
11	$e^{-at}\cos \omega t \ u_0(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Transformada inversa

La integral de la transformada inversa:

$$\zeta^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds$$

Esta integral es difícil de evaluar ya que requiere integración de contorno (perfil) utilizando teoría de variable compleja. Afortunadamente, para la mayoría de los problemas de ingeniería podemos referirnos a tablas de propiedades, y parejas de transformadas comunes para buscar la transformada inversa.

Expansión de Fracciones parciales

Con bastante frecuencia las expresiones de la transformada de Laplace no están en forma reconocible, pero en la mayoría de los casos aparece en una forma racional de s, es decir:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Donde N(s) y D(s) son polinomios que pueden ser expresados como:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Los coeficientes a_k y b_k son números reales para $k = 1,2, \ldots\ldots, n,$ y si la potencia más alta m de $N(s)$ es menor que la potencia más alta n de $D(s)$, es decir., $m < n$, $F(s)$ se dice que es expresada como una función racional propia. Si $m \geq n$, $F(s)$ es una función racional impropia.

Expansión de Fracciones parciales

En una función racional propia, las raíces de $N(s)$, encontradas haciendo $N(s) = 0$; son llamadas ceros de $F(s)$. Las raíces de $D(s)$, encontradas haciendo $D(s) = 0$, son llamados polos de $F(s)$. Asumiremos que $F(s)$ es una función racional propia. Entonces, se acostumbra y es muy conveniente hacer los coeficientes de s^n unitarios; así, escribimos a $F(s)$ como:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{a_n}(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Los ceros y los polos pueden ser reales y diferentes, o iguales, o complejos conjugados, o combinaciones de reales y complejos conjugados.

Caso 1.- Polos diferentes

Si todos los polos $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$ de $F(s)$ son diferentes (uno del otro), podemos factorizar el denominador de $F(s)$ en la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\cdots(s-p_n)}$$

Donde p_k es diferente a todos los otros polos. Después, utilizando el método de expansión en fracciones parciales, podemos expresar esta relación como:

$$F(s) = \frac{r_1}{(s-p_1)} + \frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + \cdots + \frac{r_n}{(s-p_n)}$$

Donde $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ son los residuos, y $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$ son los polos de $F(s)$. Para evaluar el residuo r_k, multiplicamos ambos lados de $F(s)$ por $(s-p_k)$; entonces, evaluamos en $s \to p_k$, es decir:

$$F(s) = \lim_{s \to p_k} (s-p_k)\, F(s) = (s-p_k)\, F(s)\Big|_{s=p_k}$$

Ejemplo

Use el método de expansión de fracciones parciales para simplificar $F_1(s)$ y encontrar la función en el dominio del tiempo $f_1(t)$

$$F_1(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{r_1}{(s+1)} + \frac{r_2}{(s+2)}$$

$$r_1 = \lim_{s\to -1}(s+1)F(s) = \left.\frac{3s+2}{(s+2)}\right|_{s=-1} = -1$$

$$r_2 = \lim_{s\to -2}(s+2)F(s) = \left.\frac{3s+2}{(s+1)}\right|_{s=-2} = 4$$

$$F_1(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{4}{(s+2)}$$

Como:

$$e^{-at}u_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

Entonces:

$$F_1(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{4}{(s+2)} \Leftrightarrow \boxed{f_1(t)(-e^{-t} + 4e^{-2t})u_0(t)}$$

Los residuos y los polos de una función racional de polinomios, pueden ser fácilmente encontrados utilizando la función residue(a,b) de MATLAB.

$$F_1(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{4}{(s+2)} \Leftrightarrow f_1(t)(-e^{-t}+4e^{-2t})u_0(t)$$

```
Ns=[3,2];
Ds=[1,2,3];
[r,p,k]=residue(Ns,Ds)
```

y Matlab regresa los valores

```
r=4
  -1

p=-2
   -1
k=[]
```

```
Syms s t;
Fs=(3*s+2)/(s^2+3*s+2);
Ft=ilaplace(Fs);
Pretty(ft)
```

Con este código Matlab despliega la expresión:

4 exp(-2t)-exp(-t)

Ejemplo

Use el método de expansión en fracciones parciales para simplificar $F_1(s)$ y encontrar la función en el dominio del tiempo $f_1(t)$.

$$F_1(s) = \frac{3s^2 + 2s + 5}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}$$

$$F_1(s) = \frac{3s^2 + 2s + 5}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48} = \frac{3s^2 + 2s + 5}{(s+2)(s+4)(s+6)} = \frac{r_1}{(s+2)} + \frac{r_2}{(s+4)} + \frac{r_3}{(s+6)}$$

$$r_1 = \left.\frac{3s^2 + 2s + 5}{(s+4)(s+6)}\right|_{s=-2} = \frac{9}{8}$$

$$r_2 = \left.\frac{3s^2 + 2s + 5}{(s+2)(s+6)}\right|_{s=-4} = -\frac{37}{4}$$

$$r_3 = \left.\frac{3s^2 + 2s + 5}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=-6} = \frac{89}{8}$$

$$F_1(s) = \frac{3s^2 + 2s + 5}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48} = \frac{9/8}{(s+2)} + \frac{-37/4}{(s+4)} + \frac{89/8}{(s+6)}$$

Como:

$$e^{-at}u_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

Entonces:

$$F_1(s) = \frac{3s^2 + 2s + 5}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48} = \frac{9/8}{(s+2)} + \frac{-37/4}{(s+4)} + \frac{89/8}{(s+6)} \Leftrightarrow \boxed{f_1(t) = \left(\frac{9}{8}e^{-2t} - \frac{37}{4}e^{-4t} + \frac{89}{8}e^{-6t}\right)u_0(t)}$$

```
Syms s;
Factor(s^3+12*s^2+44*s+48);
Ans=
(s+2)*(s+4)*(s+6)
```

```
Syms s t;
Fs=(3*s^2+2*s+5)/(s^3+12*s^2+44*s+48);
ft=ilaplace(Fs);
ft=
-37/4*exp(-4*t)+9/8*exp(-2*t)+89/8*exp(-6*t)
```

Caso 2.- Polos complejos

Con bastante frecuencia, los polos de $F(s)$ son complejo, y ya que los polos ocurren en parejas de complejos conjugados, el numero de polos complejos es par. Así, si p_k es una raíz compleja de $D(s)$, entonces, su polo complejo conjugado, denotado por p_k^*, también es una raíz de $D(s)$. El método de expansión de fracciones parciales puede también ser utilizado en este caso, pero puede ser necesario manipular los términos de la expansión de manera que se expresen de la forma conocida. El procedimiento en ilustrado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Use el método de expansión de fracciones parciales para simplificar $F(s)$, y encuentre la función en el dominio del tiempo $f(t)$.

$$F(s) = \frac{s+3}{s^{3+}5s^2 + 12s + 8}$$

```
Syms s;

Factor(s^3+5*s^2+12*s+8);

Ans=(s+1)*(s^2+4*s+8)

p=[1 4 8];
poots p=roots(p);

roots p=

-2.0000+2.0000i
-2.0000+2.0000i
```

$$F(s) = \frac{s+3}{s^{3+}5s^2 + 12s + 8} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)}$$

$$F(s) = \frac{s+3}{s^{3+}5s^2 + 12s + 8} = \frac{r_1}{(s+1)} + \frac{r_2}{(s+2+j2)} + \frac{{r_2}^*}{(s+2-j2)}$$

Los residuos son:

$$r_1 = \left.\frac{s+3}{s^2+4s+8}\right|_{s=-1} = \frac{2}{5}$$

$$r_2 = \left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2-j2)}\right|_{s=-2-j2} = \frac{1-j2}{(1-j2)(-j4)} = \frac{1-j2}{-8+j4}$$

$$r_2 = \frac{(1-j2)(-8-j4)}{(-8+j4)(-8-j4)} = \frac{-16+j12}{80} = -\frac{1}{5} + \frac{j3}{20}$$

$${r_2}^* = \left(-\frac{1}{5} + \frac{j3}{20}\right)^* = -\frac{1}{5} - j\frac{3}{20}$$

$$F(s) = \frac{2/5}{(s+1)} + \frac{-\frac{1}{5} + j3/20}{(s+2+j2)} + \frac{-\frac{1}{5} - j3/20}{(s+2-j2)}$$

```
Syms s;

simple((-1/5+3j/20)/(s+2+2j)+(-1/5-3j/20)/(s+2-2j));

ans=
                    (-2*s-1)/(5*s^2+20*s+40)
```

$$F(s) = \frac{2/5}{(s+1)} - \frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)}$$

$$F(s) = \frac{2/5}{(s+1)} - \frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)}$$

$$F_1(s) = \frac{2/5}{(s+1)} \Leftrightarrow f_1(t) = \frac{2}{5}e^{-t}$$

$$F_2(s) = -\frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)}$$

Y recordando que:

$$e^{-at}\sin\omega t\, u_0 t \Leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$e^{-at}\cos\omega t\, u_0 t \Leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$F_2(s) = -\frac{2}{5}\left(\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{(s+2)^2+2^2}\right) = -\frac{2}{5}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} + \frac{-\frac{3}{2}}{(s+2)^2+2^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right) + \frac{\frac{6}{10}}{2}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right)$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{2/5}{(s+1)} - \frac{2}{5}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right)$$

$$f(t) = \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-2t}\cos 2t + \frac{3}{10}e^{-2t}\sin 2t$$

```
Syms s t w;

Fs=(s+3)/(s^3+5*s^2+12*s+8);

ft=ilaplace(Fs)

ft=

2/5*exp(-t)-2/5*exp(-2*t)*cos(2*t)+3/10*exp(-2*t)*sin(2*t)
```

Caso 3.- Polos múltiples

En este caso, F(s) tiene polos simples, pero uno de los polos, digamos p1, tiene una multiplicidad m. Lo expresamos como:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^m(s-p_2)\cdots(s-p_{n-1})(s-p_n)} \;\ldots.(1)$$

Denotando los m residuos correspondientes a polos múltiples p_1 como r_{11}, r_{12}, r_{13},.....,r_{1m}, la expansión de fracciones parciales se escribe como:

$$F(s) = \frac{r_{11}}{(s-p_1)^m} + \frac{r_{12}}{(s-p_1)^{m-1}} + \frac{r_{13}}{(s-p_1)^{m-2}} + \cdots + \frac{r_{1m}}{(s-p_1)}$$

$$+ \frac{r_2}{(s-p_3)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + \cdots + \frac{r_n}{(s-p_n)} \;\ldots.(2)$$

Para los polos simples p_1, p_2, …, p_n, procedemos como antes, es decir, encontramos los residuos como:

$$r_k = \lim_{s\to p_k}(s-p_k)F(s) = (s-p_k)F(s)|_{s=p_k} \;\ldots.(3)$$

Los residuos r_{11}, r_{12}, r_{13},…, r_{1m} correspondientes a los polos repetidos, son encontrados por multiplicar ambos lados de F(s) por $(s\text{-}p)^m$. Entonces:

$$(s-p_k)^m F(s) = r_{11} + (s-p_1)r_{12} + (s-p_1)^2 r_{13} + \cdots +$$

$$+(s-p_1)^m\left(\frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + \cdots + \frac{r_n}{(s-p_n)}\right) \;\ldots.(4)$$

Caso 3.- Polos múltiples

Después tomamos el limite cuando s→p1 en ambos lados de la ecuación anterior:

$$\lim_{s\to p_1}(s-p_1)^m F(s) = r_{11} + \lim_{s\to p_1}[(s-p_1)r_{12} + (s-p_1)^2 r_{12} + \cdots + (s-p_1)^{m-1} r_{1m}] +$$

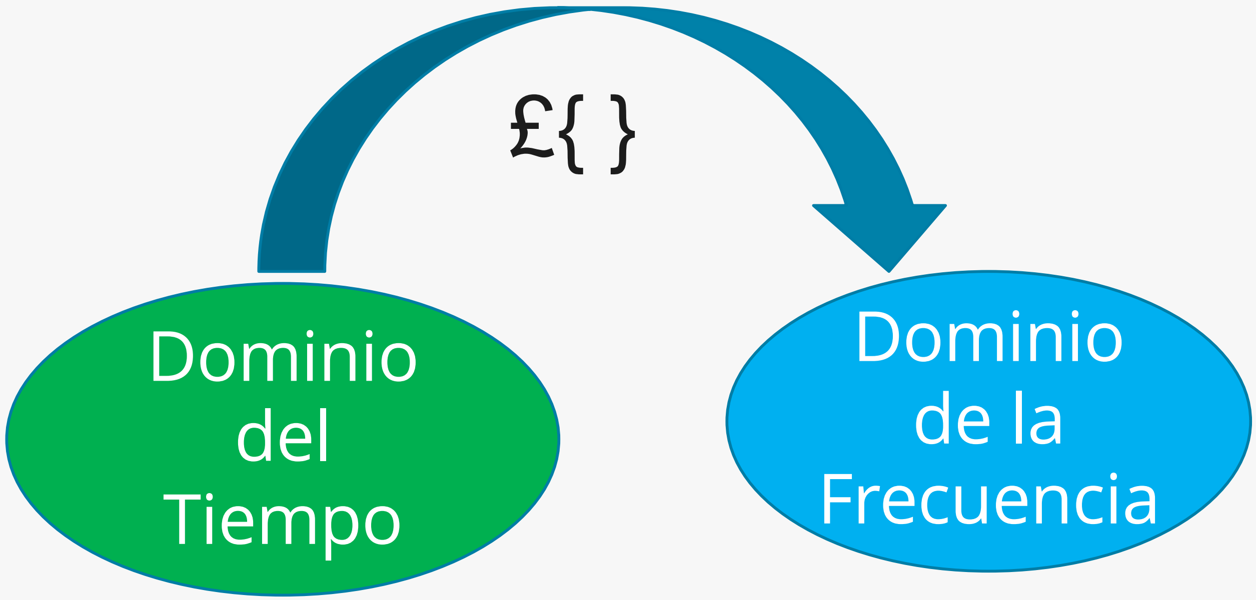
$$+\lim_{s\to p_1}[(s-p_1)^m]\left(\frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} + \cdots + \frac{r_n}{(s-p_n)}\right) \ldots.(5)$$

o

$$r_{11} = \lim_{s\to p_1}(s-p_1)^m F(s) \ldots.(6)$$

Y así se produce el residuo del primer polo repetido.

El residuos r_{12} para el segundo polo repetido p_1 , es encontrado derivando (4) con resecto a s y nuevamente, dejamos $s \to p_1$, es decir:



$$\pounds\left\{\begin{array}{l}\text{-Ecuación Diferencial}\\ \text{-Ecuaciones integro diferenciales}\end{array}\right\}$$

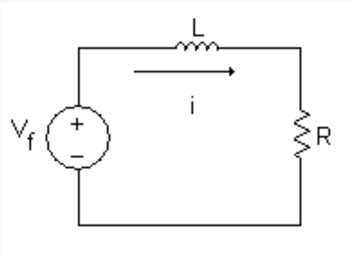
Procedimiento

El método de la transformada de Laplace para el análisis de circuitos, se divide en 5 pasos:

1. Escribir las ecuaciones integro diferenciales en el dominio del tiempo que describan el circuito.
2. Transformar las ecuaciones integro diferenciales a ecuaciones algebraicas en el dominio de S.
3. Resolver las ecuaciones algebraicas en el dominio S para la incógnita de interés.
4. Efectuar la transformada inversa de las variables en el dominio S de nuevo al dominio del tiempo.
5. Comprobar las expresiones en el dominio del tiempo que se obtuvieron para verificar que tenga sentido en lo que respecta al comportamiento físico del circuito.

Ejemplo

Hallar $\boldsymbol{i(t)}$ ***para*** $\boldsymbol{t > 0}$***, si:*** $\boldsymbol{L = 0.5\ H, R = 1\Omega, V_f = 2\ volts, i(0^-) = 1\ Amp.}$



1.- Establecer las ecuaciones integro diferenciales en el dominio del tiempo que describan al circuito.

Aplicando LVK en la malla:

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + i = 2$$

2.- Transformar las ecuaciones integro diferenciales a ecuaciones algebraicas en el dominio de S.

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + i\right\} = \mathcal{L}\{2\}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{i\} = \mathcal{L}\{2\}$$

$$\frac{1}{2}[sI(s) - i(0)] + I(s) = \frac{2}{s}$$

3.- Resolver las ecuaciones algebraicas en el dominio S para la incógnita de interés.

$$\left[\frac{s}{2} + 1\right]I(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{s+2}{2}\right]I(s) = \frac{s+4}{2s}$$

$$I(s) = \frac{\frac{s+4}{2s}}{\frac{s+2}{2}} = \frac{s+4}{s(s+2)}$$

4.- Efectuar la transformada inversa de las variables en el dominio S de nuevo al dominio del tiempo.

$$i(t) = \mathcal{L}\{I(s)\}^{-1}$$

Utilizando fracciones parciales:

$$I(s) = \frac{s+4}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)}$$

Para el residua A, tenemos:

$$A = sI(s) = \left.\frac{s+4}{(s+2)}\right|_{s=0} = A + \left.\frac{sB}{(s+2)}\right|_{s=0}$$

$$A = \frac{4}{2} = 2$$

Para el residua B, tenemos:

$$B = (s+2)I(s) = \left.\frac{s+4}{s}\right|_{s=-2} = \left.\frac{A(s+2)}{s}\right|_{s=-2} + B$$

$$B = \frac{-2+4}{-2} = -1$$

Ejemplo

Hallar $\boldsymbol{i(t)}$ ***para*** $\boldsymbol{t > 0}$, ***si:*** $\boldsymbol{L = 0.5\, H, R = 1\Omega, V_f = 2\, volts, i(0^-) = 1\, Amp.}$

De esta manera:

$$I(s) = \frac{s+4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\boxed{i(t) = 2 - e^{-2t}}$$

5.- Comprobar las expresiones en el dominio del tiempo que se obtuvieron para verificar que tenga sentido en lo que respecta al comportamiento físico del circuito.

Cálculo del valor inicial

Teorema del valor inicial:

$$i(0) = \lim_{s\to\infty} sI(s) = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{s+4}{s(s+2)}\right]$$

$$i(0) = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{s+4}{s+2}\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{1+4/s}{1+2/s} = \frac{1+4/\infty}{1+2/\infty}$$

$$i(0) = \frac{1}{1} = 1$$

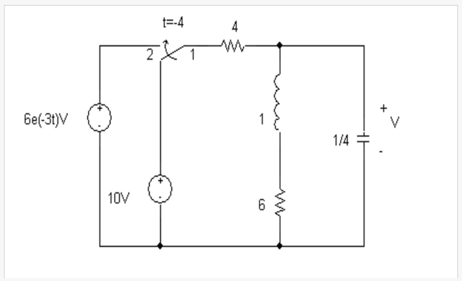
Cálculo del valor final

$$i(\infty) = \lim_{s\to 0} sI(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{s+4}{s(s+2)}\right]$$

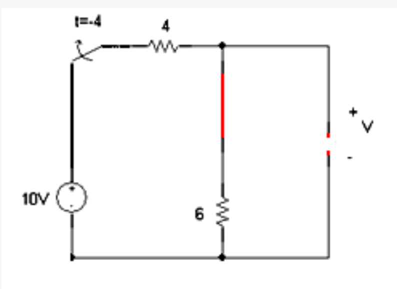
$$i(\infty) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s+4}{s+2}\right] = \frac{0+4}{0+2} = 2$$

Ejemplo

Hallar V(t) para $t > 0$.



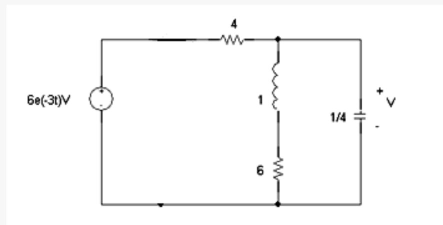
-----   ANALISIS PARA t < 0   -----



$$i_L(0^-) = \frac{10}{10} = 1\,Amp$$

$$v(0^-) = 6(1) = 6\,Volts$$

-----   ANALISIS PARA t > 0   -----



Aplicando LCK en el nodo x

$$\frac{v_f - v}{4} = i_L + \frac{1}{4}\frac{dv}{dt}$$

$$v_f = 4i_L + \frac{dv}{dt} + v \,....(1)$$

Del circuito:

$$v = 1\frac{di_L}{dt} + 6i_L$$

$$v - 1\frac{di_L}{dt} - 6i_L = 0 \,....(2)$$

Aplicando la transformada de Laplace a (1) y (2) :

$$\mathcal{L}\{4i_L\} + \mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{v\} = \mathcal{L}\{6e^{-3t}\}$$

$$4I(s) + [sV(s) - v(0^-)] + V(s) = 6\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

$$4I(s) + (s+1)V(s) = \frac{6}{s+3} + 6 = \frac{6s+24}{s+3} \,....(1')$$

$$\mathcal{L}\{v\} - \mathcal{L}\left\{1\frac{di_L}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{6i_L\} = 0$$

$$V(s) - [sI(s) - i(0^-)] - 6I(s) = 0$$

$$V(s) - (s+6)I(s) = -1 \,....(2')$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es:

$$4I(s) + (s+1)V(s) = \frac{6s+24}{s+3}$$
$$-(s+6)I(s) + V(s) = -1$$

Ejemplo

Resolviendo el sistema para $V(s)$, vía CRAMER:

$$V(s) = \frac{\begin{vmatrix} 4 & \frac{6s+24}{s+3} \\ -(s+6) & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & (s+1) \\ -(s+6) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + (s+6)\frac{6s+24}{s+3}}{4 + (s+6)(s+1)}$$

$$V(s) = \frac{-4 + \frac{6s^2 + 24s + 36s + 144}{s+3}}{4 + s^2 + 7s + 6} = \frac{-4 + \frac{6s^2 + 60s + 144}{s+3}}{s^2 + 7s + 10}$$

$$V(s) = \frac{\frac{6s^2 + 60s + 144 - 4(s+3)}{s+3}}{s^2 + 7s + 10} = \frac{\frac{6s^2 + 60s + 144 - 4s - 12}{s+3}}{s^2 + 7s + 10}$$

$$V(s) = \frac{\frac{6s^2 + 56s + 132}{s+3}}{s^2 + 7s + 10} = \frac{6s^2 + 56s + 132}{(s+3)(s^2 + 7s + 10)} = \frac{6s^2 + 56s + 132}{(s+3)(s+2)(s+5)}$$

Aplicando la expansión en fracciones parciales tenemos:

$$V(s) = \frac{6s^2 + 56s + 132}{(s+3)(s+2)(s+5)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+5)}$$

$$6s^2 + 56s + 132 = A(s+2)(s+5) + B(s+3)(s+5) + C(s+3)(s+2)$$

$$6s^2 + 56s + 132 = A(s^2 + 7s + 10) + B(s^2 + 8s + 15) + C(s^2 + 5s + 6)$$

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 6 \\ 7A + 8B + 5C &= 56 \\ 10A + 15B + 6C &= 132 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} A &= -9 \\ B &= 44/3 \\ C &= 1/3 \end{aligned}$$

$$V(s) = \frac{6s^2 + 56s + 132}{(s+3)(s+2)(s+5)} = \frac{-9}{(s+3)} + \frac{44/3}{(s+2)} + \frac{1/3}{(s+5)}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-9}{(s+3)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{44/3}{(s+2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{(s+5)}\right\}$$

$$\boxed{v(t) = -9e^{-3t} + \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}}$$

Comprobación

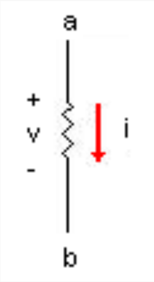
```
Syms s t w;

fs=((6*s^2+56*s+132)/((s+3)*(s+2)*(s+5)));

ft=ilaplace(fs)

ft=
                    -9*exp(-3*t)+44/3*exp(-2*t)+1/3*exp(-5*t)
```

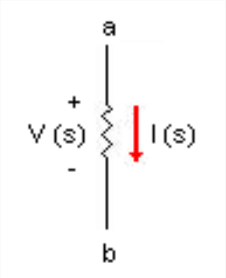
Resistencia



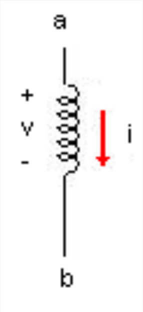
$$v = Ri$$

$$\mathcal{L}\{v\} = \text{R}\,\mathcal{L}\,\{i\}$$

$$V(\text{s}) = RI(\text{s})$$



Inductancia



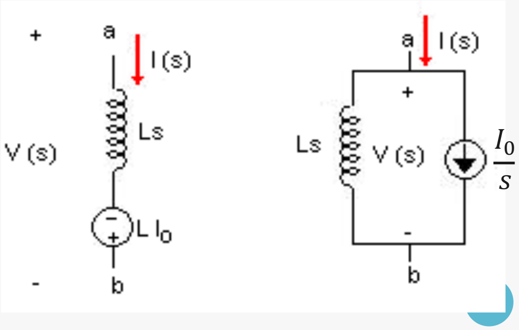
$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$\mathcal{L}\{v\} = \mathcal{L}\left\{L\frac{di}{dt}\right\}$$

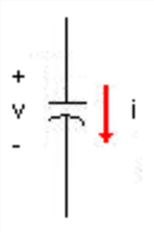
$$V(\text{s}) = L\,[sI(\text{s}) - i(0^-)]$$

$$V(\text{s}) = L\,sI(\text{s}) - LI_0$$

$$I(\text{s}) = \frac{V(\text{s}) + LI_0}{Ls} = \frac{V(\text{s})}{Ls} + \frac{I_0}{s}$$



Capacitancia



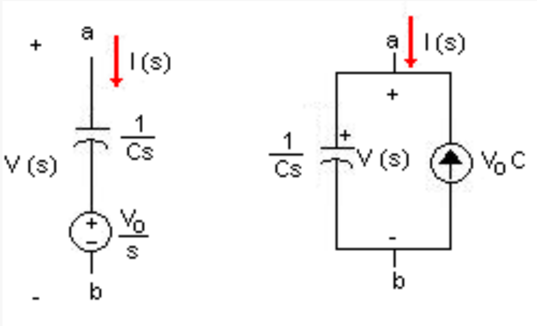
$$i = L\frac{dv}{dt}$$

$$\mathcal{L}\{i\} = \mathcal{L}\left\{C\frac{dv}{dt}\right\}$$

$$I(s) = C\ [s\,V(s) - v(0^{-})]$$

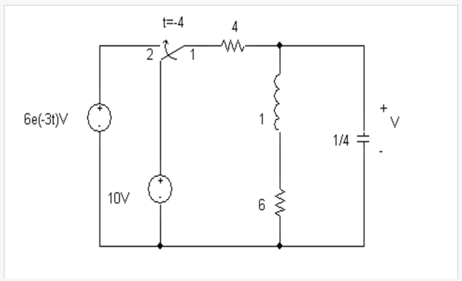
$$I(s) = Cs\,V(s) - CV_0$$

$$V(s) = \frac{I(s) + CV_0}{Cs} = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{V_0}{s}$$

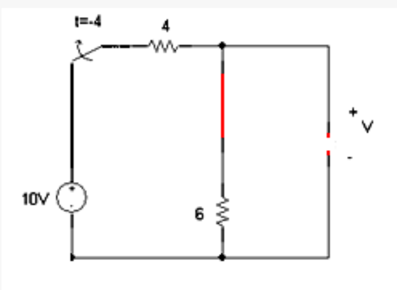


Ejemplo

Hallar $V(t)$ *para* $t > 0.$



----- ANALISIS PARA t < 0 -----

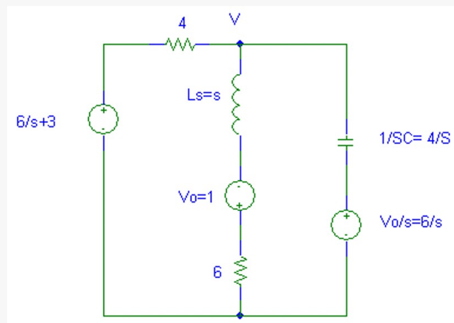


$$i_L(0^-) = \frac{10}{10} = 1\ Amp$$

$$v(0^-) = 6(1) = 6\ Volts$$

----- ANALISIS PARA t > 0 -----

Transformando el circuito al dominio de la frecuencia:



Aplicando LCK en V:

$$\frac{\frac{6}{s+3} - V(s)}{4} = I(s) + \frac{V(s) - \frac{6}{s}}{\frac{4}{s}} = I(s) + \frac{V(s)s}{4} - \frac{6}{4}$$

Multiplicando por 4:

$$\frac{6}{s+3} - V(s) = 4I(s) + V(s)s - 6$$

$$\frac{6}{s+3} = 4I(s) + V(s)(s+1) - 6$$

$$4I(s) + V(s)(s+1) = \frac{6}{s+3} + 6 = \frac{6 + 6(s+3)}{s+3}$$

$$4I(s) + V(s)(s+1) = \frac{6s+24}{s+3} \ldots .(1)$$

Pero:

$$V(s) = I(s)s - 1 + 6I(s)$$

$$V(s) = I(s)(s+6) - 1$$

$$V(s) - I(s)(s+6) = -1 \ldots .(2)$$

Resolviendo el sistema para V_s:

$$V(s) = \frac{\begin{vmatrix} 4 & \frac{6s+24}{s+3} \\ -(s+6) & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & s+1 \\ -(s+6) & 1 \end{vmatrix}}$$

$$V(s) = \frac{-4 + \frac{(s+6)(6s+24)}{s+3}}{4 + (s+1)(s+6)}$$

Ejemplo

Hallar $V(t)$ para $t > 0$.

$$V(s) = \frac{-4 + \frac{(s+6)(6s+24)}{s+3}}{4 + (s+1)(s+6)}$$

$$V(s) = \frac{\frac{-4(s+3) + (s+6)(6s+24)}{s+3}}{4 + (s+1)(s+6)}$$

$$V(s) = \frac{-4(s+3) + (s+6)(6s+24)}{[4 + (s+1)(s+6)](s+3)}$$

$$V(s) = \frac{-4s - 12 + 6s^2 + 60s + 144}{4(s+3) + (s+1)(s+6)(s+3)}$$

$$V(s) = \frac{6s^2 + 56s + 132}{4s + 12 + s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$$

$$V(s) = \frac{6s^2 + 56s + 132}{s^3 + 10s^2 + 31s + 30}$$

$$V(s) = \frac{6s^2 + 56s + 132}{(s+3)(s+2)(s+5)}$$

```
Syms s t w;

Fs=(6*s^2+56*s+132)/((s+3)*(s+2)*(s+5));

ft=ilaplace(Fs)

ft=
    44/3*exp(-2*t)+1/3*exp(-5*t)-9*exp(-3*t)
```

Aplicando la expansión en fracciones parciales:

$$V_s = \frac{6s^2 + 56s + 132}{(s+3)(s+2)(s+5)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+5)}$$

$$6s^2 + 56s + 132 = A(s+2)(s+5) + B(s+3)(s+5) + C(s+3)(s+2)$$

$$\begin{aligned} A + \quad B + \quad C &= 6 \\ 7A + \ 8B + \ 5C &= 56 \\ 10A + 15B + 6C &= 132 \end{aligned} \qquad A = -9, \quad B = \frac{44}{3}, \quad C = \frac{1}{3}$$

De esta forma:

$$V(s) = \frac{-9}{s+3} + \frac{44/3}{s+2} + \frac{1/3}{s+5}$$

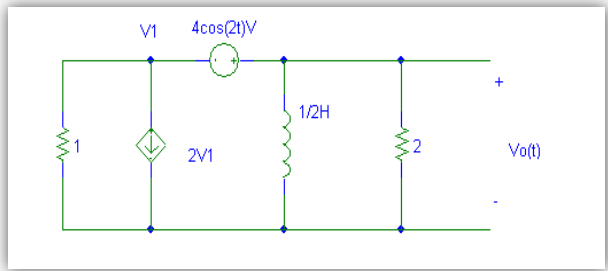
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-9}{(s+3)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{44/3}{(s+2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{(s+5)}\right\}$$

$$v(t) = -9e^{-3t} + \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}$$

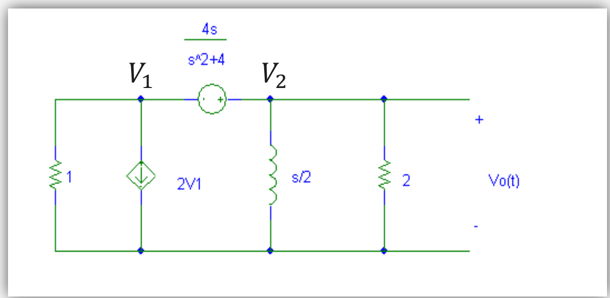
Ejemplo

Hallar $V_0(t)$ para $t > 0$.



----- ANALISIS PARA t > 0 -----

Transformando el circuito al dominio de la frecuencia:



Aplicando LCK en el supernodo:

$$\frac{V_1(s)}{1} + 2V_1(s) + \frac{V_2(s)}{\frac{s}{2}} + \frac{V_2(s)}{2} = 0$$

$$V_1(s) + 2V_1(s) + \frac{2V_2(s)}{s} + \frac{V_2(s)}{2} = 0$$

$$3V_1(s) + \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{2}\right)V_2(s) = 0 \ldots.(1)$$

La ecuación de restricción es:

$$V_2(s) - V_1(s) = V_f \ldots.(2)$$

$$V_1(s) = V_2(s) - V_f$$

Sustituyendo en 1:

$$3\left(V_2(s) - V_f\right) + \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{2}\right)V_2(s) = 0$$

$$3V_2(s) - 3V_f + \left(\frac{s+4}{2s}\right)V_2(s) = 0$$

$$\left(\frac{s+4}{2s} + 3\right)V_2(s) = 3V_f$$

$$\left(\frac{s+4+6s}{2s}\right)V_2(s) = 3V_f$$

$$\boxed{V_2(s) = \left(\frac{6s}{7s+4}\right)V_f}$$

$$V_2(s) = \left(\frac{6s}{7s+4}\right)\left(\frac{4s}{s^2+4}\right)$$

$$V_2(s) = \frac{24s^2}{(7s+4)(s^2+4)}$$

$$V_2(s) = \frac{24s^2}{7s^3+4s^2+28s+16}$$

Aplicando la expansión en fracciones parciales:

$$V_2(s) = \frac{24s^2}{7s^3+4s^2+28s+16} =$$

$$= \frac{1.5849+0.4528j}{s+0-2j} + \frac{1.5849-0.4528j}{s+0+2j} + \frac{0.2588}{s+0.5714}$$

$$= \frac{1.648313\angle 15.94}{s+0-2j} + \frac{1.648313\angle -15.94}{s+0+2j} + \frac{0.2588}{s+0.5714}$$

Ejemplo

Hallar $V_0(t)$ *para* $t > 0$.

$$V_2(s) = \frac{1.648313\ \angle 15.94}{s+0-2j} + \frac{1.648313\ \angle -15.94}{s+0+2j} + \frac{0.2588}{s+0.5714}$$

$$\mathrm{v}(t) \ = \mathcal{L}^{-1}\{V_2(s)\}$$

$$v(t) \ = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1.648313\ \angle 15.94}{s+0-2j}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1.648313\ \angle 15.94}{s+0-2j}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.2588}{s+0.5714}\right\}$$

Aplicando la formula:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s+\alpha-j\beta} + \frac{k^*}{s+\alpha+j\beta}\right\} = 2|k|\ e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)$$

$$v(t) = 3.2966e^{-0\mathrm{t}}\ cos(2t+15.94) + 0.2588e^{-0.5714\mathrm{t}}$$

$$v(t) = 3.2966\ cos(2t+15.94) + 0.2588e^{-0.5714t}$$

```
Syms s t w;
Fs(24*s^2)/(7*s^3+4*s^2+28*s+16)
ft=ilaplace(Fs)
ft=
96/371*exp(-4/7*t)+168/53*cos(2*t)-48/53*sin(-2*t)
```

Comprobación:

$$V_2\ (s) = \frac{6s}{7s+4}V_f$$

$$\frac{V_2\ (s)}{V_f} = \frac{6s}{7s+4} \quad y \quad V_f = 4\ cos(2t)\begin{cases} V_m = 4 \\ \omega_0 = 2j \end{cases}$$

$$\frac{V_2\ (s)}{V_f} = \frac{6(2j)}{7(2j)+4} = \frac{12j}{14j+4} = \frac{12\ \angle 90}{14.56022\angle 74.05}$$

$$\frac{V_2\ (s)}{V_f} = 0.8241633\angle 15.95$$

Aplicando la formula:

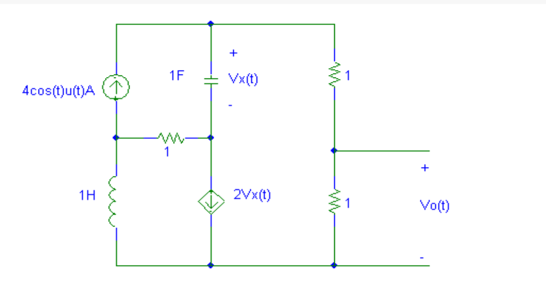
$$v(t) = V_m|H(j\omega)|\ cos\big(\omega_0 t + \phi(j\omega)\big)$$

$$v(t) = 4(0.8241633)\ cos(2t+15.95)$$

$$v(t) = 3.2966\cos(2t+15.95)$$

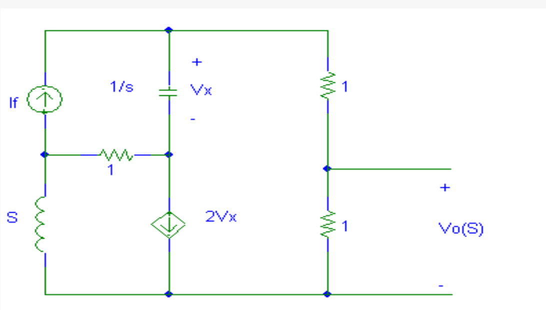
Ejemplo

Hallar $V_0(t)$ para $t > 0$.



----- ANALISIS PARA t > 0 -----

Transformando el circuito al dominio de la frecuencia:



Aplicando LCK en la supermalla:

$$sI_2(s) + 1\big(I_2(s) - I_1(s)\big) + \frac{1}{s}\big(I_3(s) - I_1(s)\big) + 2I_3(s) = 0$$

$$sI_2(s) + I_2(s) - I_1(s) + \frac{1}{s}I_3(s) - \frac{1}{s}I_1(s) + 2I_3(s) = 0$$

$$-\left(\frac{1}{s} + 1\right)I_1(s) + (s+1)I_2(s) + \left(\frac{1}{s} + 2\right)I_3(s) = 0 \ldots.(1)$$

La ecuación de restricción es:

$$I_2(s) - I_3(s) = 2V_x \ldots.(2)$$

Pero:

$$V_x = \frac{1}{s}\big(I_1(s) - I_3(s)\big)$$

Entonces:

$$I_2(s) - I_3(s) = \frac{2}{s}\big(I_1(s) - I_3(s)\big)$$

$$I_2(s) - \frac{2}{s}I_1(s) - I_3(s) + \frac{2}{s}I_3(s) = 0$$

$$-\frac{2}{s}I_1(s) + I_2(s) + \left(\frac{2}{s} - 1\right)I_3(s) = 0 \ldots.(2')$$

Pero si $I_1(s) = I_f$, entonces:

$$I_2(s) + \left(\frac{2}{s} - 1\right)I_3(s) = \frac{2}{s}I_f(s)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

$$(s+1)I_2(s) + \left(\frac{1}{s} + 2\right)I_3(s) = \left(\frac{1}{s} + 1\right)I_f$$

$$I_2(s) + \left(\frac{2}{s} - 1\right)I_3(s) = \frac{2}{s}I_f$$

Resolviendo para $I_3(s)$:

$$I_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} (s+1) & \left(\frac{1}{s}+1\right)I_f \\ 1 & \frac{2}{s}I_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+1) & \left(\frac{1}{s}+2\right) \\ 1 & \left(\frac{2}{s}-1\right) \end{vmatrix}}$$

Ejemplo

Hallar $V_0(t)$ para $t > 0$.

$$I_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} (s+1) & \left(\frac{1}{s}+1\right) I_f \\ 1 & \frac{2}{s} I_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+1) & \left(\frac{1}{s}+2\right) \\ 1 & \left(\frac{2}{s}-1\right) \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{1}{s}+1\right) I_f}{\left(-1-s+\frac{1}{s}\right)}$$

$$\frac{I_3(s)}{I_f} = \frac{\left(\frac{1}{s}+1\right)}{\left(-1-s+\frac{1}{s}\right)}$$

$$\frac{I_3(s)}{I_f} = \frac{\left(\frac{1}{s}+1\right)}{\left(-1-s+\frac{1}{s}\right)} \qquad y \qquad I_f = 4cos(t) \begin{cases} I_m = 4 \\ \omega_0 = j \end{cases}$$

$$H(jw) = \frac{j+1}{j^2+\mathrm{j}-1} = \frac{j+1}{-1+\mathrm{j}-1} = \frac{\sqrt{2}\angle 45}{\sqrt{5}\angle -26.56}$$

$$H(jw) = 0.6324\angle 71.56$$

$$I_3(t) = I_m |H(jw)| \cos\left((\omega_0 t + \phi(jw))\right)$$

$$I_3(t) = 4(0.6324)\cos(t + 71.56)$$

$$\boxed{I_3(t) = 2.5298\cos(t + 71.56)}$$

Finalmente:

$$V_0(t) = 1 I_3(t) = 2.5298\cos(t + 71.56)$$