11 Estructuras para sistemas discretos

En este capítulo se muestra la forma de construir sistemas de tiempo discreto, a partir de las diferentes representaciones del mismo, mediante ciertos algoritmos (estructuras). El estudio que se presenta abarca a los sistemas *IIR* y *FIR* y a las estructuras de realización en *Forma Directa I*, *Forma Directa II* y *Cascada* principalmente.

11.1 Introducción

La ecuación de diferencias, la respuesta al impulso y la función de transferencia, son caracterizaciones equivalentes de la relación entrada-salida de un sistema LTI de tiempo discreto, como se muestra en el ejemplo de la Figura 11.1.

(a) $$y(n) = \frac{1}{4}\left[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)\right]$$

(b) $$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n) = \begin{cases} 1/4 & para \quad 0 \le n \le 3 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}} \longrightarrow y(n)$$

(c) $$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n) = \{\underset{\uparrow}{1/4}, \quad 1/4, \quad 1/4, \quad 1/4\}} \longrightarrow y(n)$$

(d) $$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{4}\left[1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right]} \longrightarrow Y(z)$$

Figura 11.1 Ejemplo de diferentes caracterizaciones de la relación entrada-salida para un filtro de promedio móvil de cuatro muestras. (a) Ecuación en diferencias; (b) respuesta al impulso (1^a forma); (c) respuesta al impulso (2^a forma) y (d) función de transferencia

Cuando se desea construir un sistema de tiempo discreto en hardware o software es necesario hacer la conversión a un algoritmo o estructura compatible con la tecnología disponible.

Uno de los grandes problemas que se presentan al momento de trasladar el diseño de un sistema discreto a su realización física, radica en la precisión infinita requerida por las variables y los coeficientes de dicho sistema, es decir, se requieren manejar, ya sea en hardware o software, un número infinito de cifras decimales en la representación de las variables y los coeficientes antes mencionados, conforme el algoritmo del sistema se va procesando.

A la arquitectura empleada para el procesamiento de las señales de entrada y salida de un sistema discreto se le llama *estructura*, la cual consiste de la interconexión de operadores matemáticos básicos que permiten realizar la función deseada para el sistema discreto. Los operadores matemáticos básicos empleados en el procesamiento digital de señales son: suma, multiplicación por una constante y almacenamiento de valores anteriores, como se muestra en la Figura 11.2.

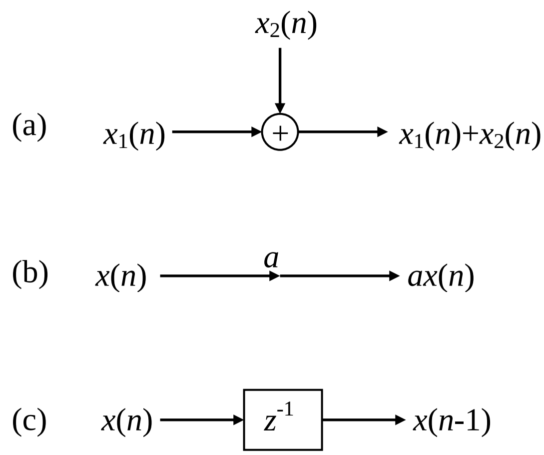


Figura 11.2 Símbolos de los elementos básicos para la realización de estructuras: (a) suma; (b) multiplicación por una constante, y (c) unidad de retardo.

En la Figura 11.3 se muestra el diagrama de flujo correspondiente a cada una de las operaciones básicas definidas anteriormente.

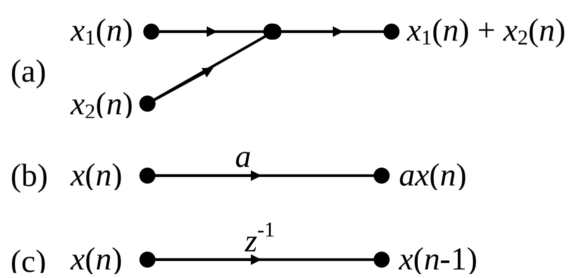


Figura 11.3 Diagrama de flujo de los símbolos de los elementos básicos: (a) suma; (b) multiplicación por una constante y (c) unidad de retardo

Debido a que no es posible representar con precisión infinita las variables ni los coeficientes de los filtros (sistemas en tiempo discreto), se buscan estructuras de construcción diversas con relaciones de entrada-salida equivalentes, cuyo comportamiento sea satisfactorio al usar aritmética de precisión finita. Aún cuando dos estructuras pueden ser equivalentes en teoría, es decir, con precisión infinita, su comportamiento puede ser muy diferente cuando la precisión es limitada, y ésta es la razón primordial para el estudio de diferentes estructuras.

Un ejemplo de interconexión de los elementos básicos para construir un filtro sencillo se muestra en la Figura 11.4.

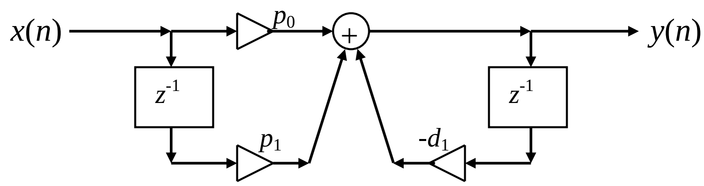


Figura 11.4 Filtro LTI digital de primer orden

De la Figura 11.4 se puede ver que:

$$y(n) = -d_1 y(n-1) + p_0 x(n) + p_1 x(n-1) \qquad (11.1.1)$$

En este caso, la ecuación de diferencias definida en (11.1.1) puede interpretarse como un algoritmo computacional válido para el cálculo de la señal de salida $y(n)$, debido a que conociendo los valores de la señal de entrada y las condiciones iniciales de la salida, y al multiplicarlos por los coeficientes $-d_1$, p_0 y p_1, y sumar los productos resultantes, se obtiene el valor presente de la salida, es decir, se puede calcular $y(n)$ para n = 0,1,2,..., conociendo la condición inicial y(-1) y la entrada $x(n)$ para n = -1,0,1,2,..., como se muestra en la secuencia de expresiones 11.1.2.

$$\begin{aligned} &y(0) = -d_1 y(-1) + p_0 x(0) + p_1 x(-1), \\ &y(1) = -d_1 y(0) + p_0 x(1) + p_1 x(0), \\ &y(2) = -d_1 y(1) + p_0 x(2) + p_1 x(1), \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned} \qquad (11.1.2)$$

11.1.1 Estructuras canónicas y no canónicas

Se dice que una estructura de filtros es canónica si el número de retardos es igual al orden de la ecuación de diferencias, es decir, el orden de la función de transferencia. En otro caso, se dice que la estructura es no canónica. Por ejemplo, la estructura de la Figura 11.4 no es canónica, puesto que usa dos retardos para realizar la ecuación de diferencias (11.1.1), que es de primer orden.

11.2 Estructuras básicas para filtros *IIR*

La función de transferencia de un filtro *IIR* está dada por:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{M}b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N}a_n z^{-n}}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}} \qquad (11.2.1)$$

donde a_n y b_n son los coeficientes del filtro. Se ha supuesto que $a_0 = 1$. El orden del filtro *IIR* es N si $a_N \neq 0$. La representación como ecuación de diferencias de un filtro *IIR* se expresa como:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)-\sum_{m=1}^{N}a_m y(n-m) \qquad (11.2.2)$$

Las formas mas usadas para la realización de un filtro *IIR* son:

1. *Directa*: En esta forma la realización sigue directamente la ecuación de diferencias. Consta de dos partes, la correspondiente al promedio móvil (numerador), y la recursiva (denominador). Esta forma se subdivide en *Forma Directa I* y *Forma Directa II*.

2. *Cascada* (*series*): En esta forma, la función de transferencia (11.2.1) de $H(z)$ se factoriza en secciones mas pequeñas de segundo orden, llamadas *biquads*. Entonces, la función de transferencia se representa como un *producto* de estas *biquads*. Cada *biquad* se realiza en forma directa, y la función total como una *cascada* de secciones *biquads*.

3. *Paralela*: Esta forma es similar a la de cascada, pero después de la factorización, se usa la expansión en fracciones parciales para representar a $H(z)$ como una *suma* de secciones mas pequeñas de segundo orden. Cada sección se realiza en forma directa, y la función total se construye como una red *paralela* de secciones.

11.2.1 Forma Directa

Para mostrar la realización de la *Forma Directa I* y la *Forma Directa II*, se presentan, como ejemplos, dos sistema LTI de primero y segundo orden, en los cuales se aplicarán las dos formas de realización.

1. **Filtro *IIR* de primer orden.**

   Si $M = N = 1$ en la ecuación de diferencias (11.2.2) se genera el filtro *IIR* de primer orden:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1) \qquad (11.2.3)$$

cuya realización en la *Forma Directa I* se muestra en la Figura 11.5.

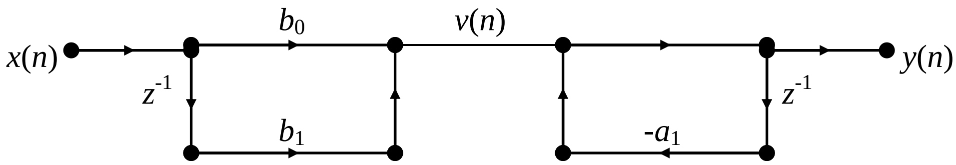


Figura 11.5 *Forma Directa I* para un filtro *IIR* de primer orden

La estructura de la Figura 11.5 se puede ver también como la conexión en serie de dos sistemas cuyas ecuaciones en diferencias se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} v(n) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \\ y(n) &= v(n) - a_1 y(n-1) \end{aligned} \qquad (11.2.4)$$

Desde este punto de vista y como los sistemas LTI conectados en serie tienen la propiedad de poderse intercambiar, entonces la estructura de la Figura 11.5 se puede dibujar como se muestra en la Figura 11.6a.

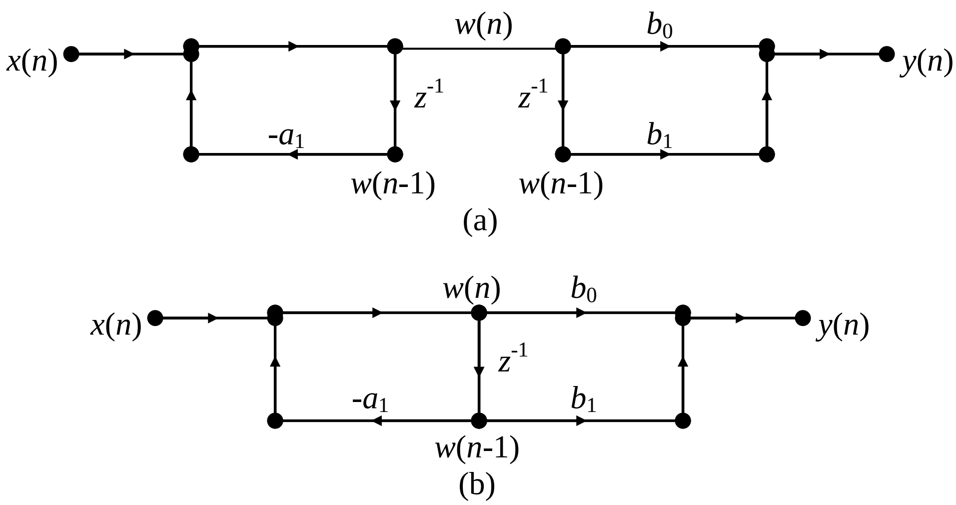


Figura 11.6 *Forma Directa II* para el filtro *IIR* de primer orden: (a) intercambio del orden de conexión en cascada; (b) *Estructura Canónica* (*Forma Directa II*)

En la Figura 11.6a se puede observar que los dos sistemas en cascada comparten la señal intermedia $w(n)$. Además, ambos sistemas tienen un retardo aplicado a dicha señal intermedia, por lo que la señal generada $w(n\text{-}1)$ es también una señal común para los dos sistemas. Por lo tanto, se pueden sustituir los dos retardos por uno solo como se muestra en la Figura 11.6b, obteniéndose la *Forma Canónica* o *Forma Directa II*.

La *Forma Directa II* tiene la ventaja de utilizar menor cantidad de retardos que la *Forma Directa I*.

2. Filtro *IIR* de segundo orden.

Para $M = N = 2$, la ecuación de diferencias (11.2.2) para el filtro *IIR*, está dada por:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 (n-2) \qquad (11.2.5)$$

que se puede realizar como se muestra en la Figura 11.7.

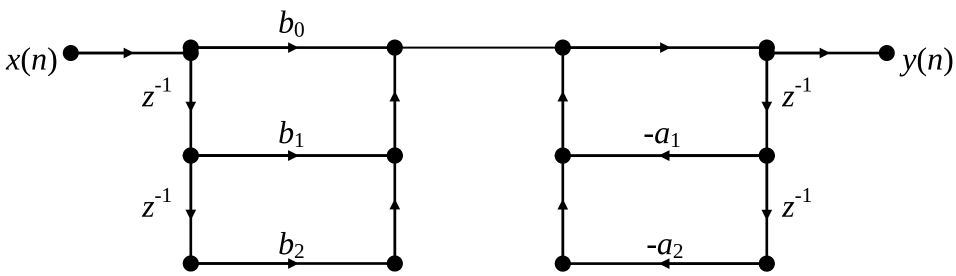
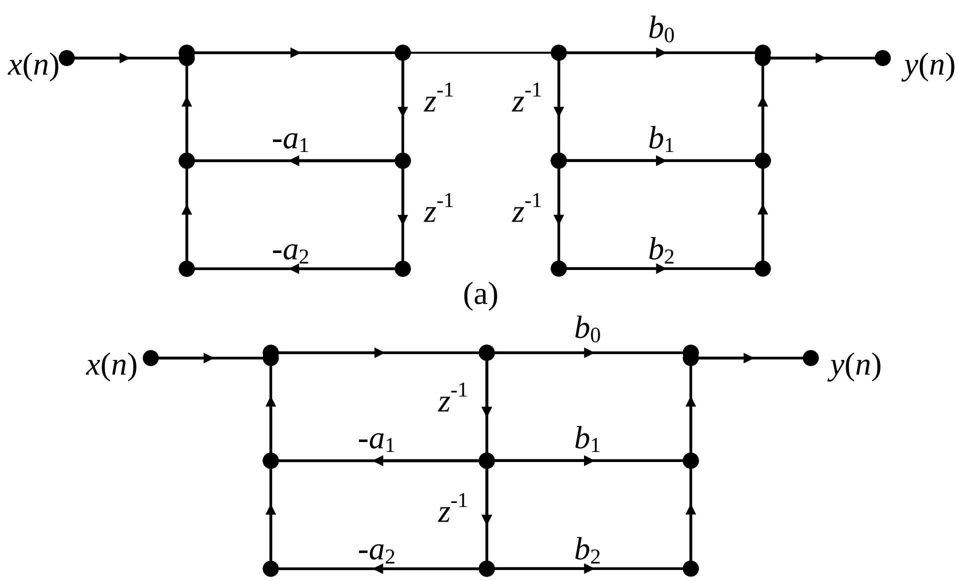


Figura 11.7 *Forma Directa I* para un filtro *IIR* de segundo orden

Puesto que el sistema es LTI, se puede intercambiar el orden de la conexión en cascada, como se muestra en la Figura 11.8a. Se puede ver en la Figura 11.8b, que es posible eliminar dos retardos. Esta reducción conduce a una *Estructura Canónica* o *Forma Directa II*.



(b)

Figura 11.8 *Forma Directa II* para un filtro *IIR* de segundo orden: (a) intercambio del orden de conexión en cascada; (b) *Estructura Canónica*.

Esta forma de realización de los filtros *IIR* de primer y segundo orden, se puede extender a filtros de cualquier orden. Por ejemplo, de la ecuación en diferencias para el filtro *IIR* de segundo orden dada en (11.2.5), se puede escribir la función de transferencia *H*(*z*) respectiva, aplicando la *Transformada Z* a dicha ecuación en diferencias y agrupando términos, obteniendo el siguiente resultado:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{11.2.6}$$

Se puede observar de la expresión anterior (11.2.6) y de la Figura 11.8b, que la realización del polinomio del denominador (polos de la función de transferencia) se localiza en la parte izquierda de la estructura, mientras que la realización del polinomio del numerador (ceros) se localiza en la parte derecha de la estructura, como se muestra en la Figura 11.9.

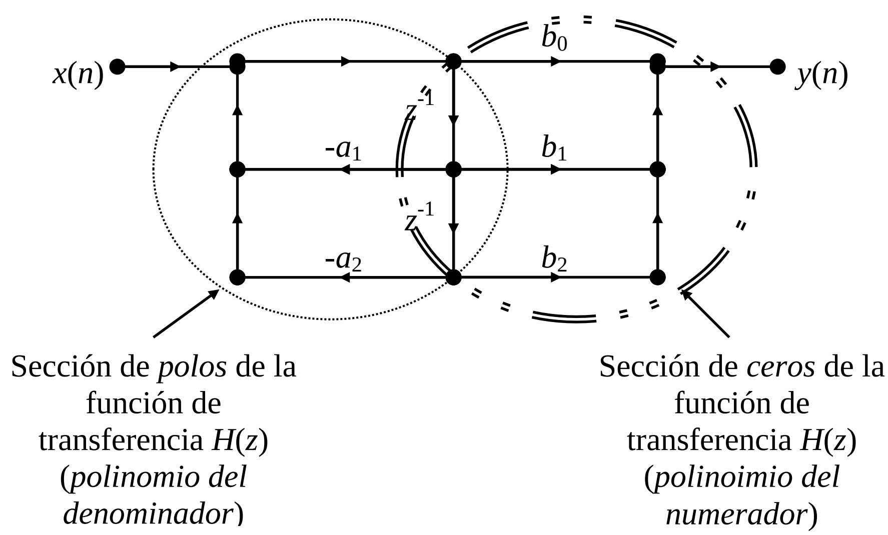


Figura 11.9 Relación entre las secciones de la estructura en *Forma Directa II* y los polinomios de la función de transferencia del filtro *IIR* de segundo orden.

Entonces, la realización de la función de transferencia general del filtro *IIR* dada en (11.2.1), quedará como se indica en la Figura 11.10 para el caso (no restrictivo) $N = M$.

En MATLAB, la estructura de Forma Directa II se describe por medio de dos vectores en fila: el vector ***b*** que contiene los coeficientes $\{b_n\}$ y el vector ***a*** que contiene los coeficientes $\{a_n\}$. En MATLAB, esta estructura se implementa con la función *filter*.

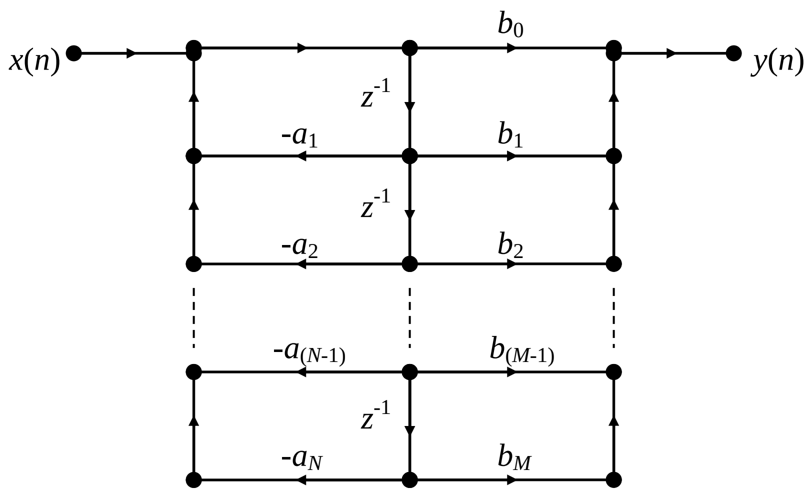


Figura 11.10 *Forma Directa II* para un filtro *IIR* de orden N (ejemplo para $N = M$)

11.2.2 Cascada (serie)

En esta forma, la función de transferencia $H(z)$ se escribe como un producto de secciones de segundo orden con coeficientes reales. Esto se hace factorizando los polinomios del numerador y denominador en sus raíces respectivas, y luego combinando ya sea los pares de raíces complejas conjugadas, o las raíces reales en polinomios de segundo orden. Por ejemplo, para la función de transferencia $H(z) = P(z)/D(z)$ expresada como se muestra a continuación:

$$H(z) = \frac{P_1(z)P_2(z)P_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)} \tag{11.2.7}$$

se pueden obtener diferentes realizaciones en cascada de $H(z)$ apareando diferentes polinomios de polos y ceros, o simplemente combinando el orden de las secciones. Sin embargo, en la práctica, debido a los efectos de la longitud de palabra finita al procesar los valores numéricos de las variables y coeficientes del filtro, cada realización en cascada se comporta diferente de las otras, aún cuando dichas realizaciones correspondan a la misma función de transferencia $H(z)$.

Generalmente, los polinomios se factorizan como productos de polinomios de primer y segundo orden. En este caso $H(z)$ se puede expresar como:

$$H(z) = p_0 \prod_k \left(\frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}} \right) \tag{11.2.8}$$

donde, $\alpha_{2k} = \beta_{2k} = 0$ para un factor de primer orden.

Una función de transferencia de tercer orden, se construye con la conexión en cascada de un factor de primer orden y uno de segundo orden, como se muestra a continuación:

$$H(z) = p_0\left(\frac{1+\beta_{11}z^{-1}}{1+\alpha_{11}z^{-1}}\right)\left(\frac{1+\beta_{12}z^{-1}+\beta_{22}z^{-2}}{1+\alpha_{12}z^{-1}+\alpha_{22}z^{-2}}\right) \tag{11.2.9}$$

Cada sección de primer orden o segundo orden, se realiza mediante la *Forma Directa II* o *Forma Canónica*, conectándolas posteriormente en serie.

La realización en *cascada* de la función de transferencia $H(z)$ presentada en (11.2.9) se muestra en la Figura 11.11.

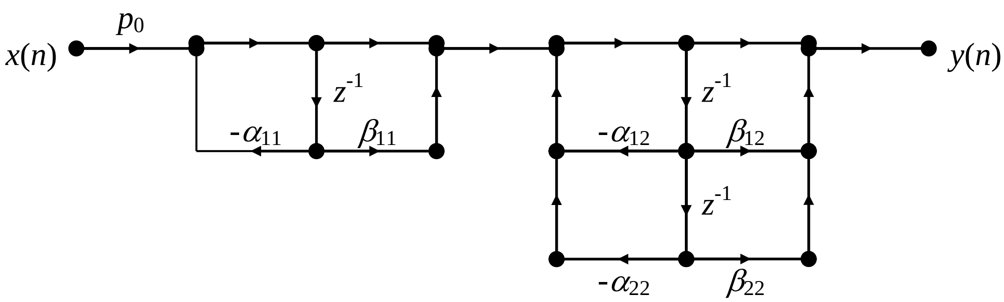


Figura 11.11 Realización en *cascada* de la función de transferencia de tercer orden presentada en (11.2.9)

Ejemplo 11.2.1

El filtro *IIR* de tercer orden representado en la Figura 11.12, tiene la función de transferencia siguiente:

$$H(z) = \frac{0.44z^2+0.362z+0.02}{z^3+0.4z^2+0.18z-0.2} = \frac{0.44z^{-1}+0.362z^{-2}+0.02z^{-3}}{1+0.4z^{-1}+0.18z^{-2}-0.2z^{-3}}$$

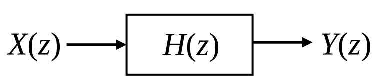


Figura 11.12 Representación de un filtro *IIR*.

Desarrollar la arquitectura de este filtro mediante las siguientes realizaciones:

(a) *Forma Directa II*.
(b) *Cascada*

Solución.

(a) La realización *Directa II* se muestra en la Figura 11.13.

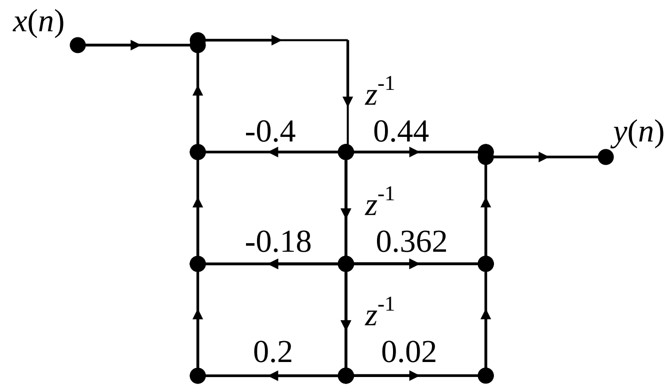


Figura 11.13 Realización *Directa II* de la función de transferencia de tercer orden $H(z)$

(b) Factorizando los polinomios del numerador y del denominador de $H(z)$, se obtiene:

$$H(z) = \frac{0.44z^2 + 0.362z + 0.02}{z^3 + 0.4z^2 + 0.18z - 0.2} = \left(\frac{0.44 + 0.362z^{-1} + 0.02z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2}} \right) \left(\frac{z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}} \right)$$

cuya realización en *cascada* se muestra en la Figura 11.14

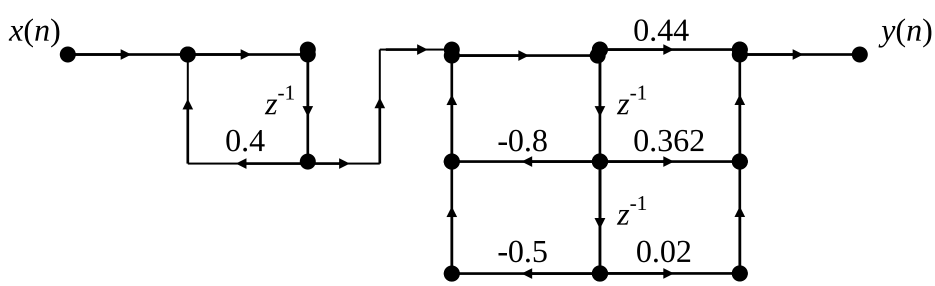


Figura 11.14 Realización en *cascada* de la función de transferencia de tercer orden $H(z)$

11.3 Estructuras básicas para filtros *FIR*

La función de transferencia de los sistemas causales *FIR* solo tienen ceros (excepto por los polos en z = 0), y puesto que los coeficientes del denominador a_k son todos cero (excepto a_o = 1), la función de transferencia para un filtro *FIR* de longitud M está dada por:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{M-1} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \qquad (11.3.1)$$

que es un polinomio de grado $M-1$.

En el dominio del tiempo, la relación de entrada-salida (ecuación en diferencias) es:

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_{M-1}x(n-M+1)=\sum_{k=0}^{M-1}b_kx(n-k) \qquad (11.3.2)$$

Existen varios tipos de estructuras para la realización de un filtro *FIR*: *Forma Directa I*, *cascada*, *paralelo*, de *fase lineal*, de *muestreo en frecuencia*, etc.

Las formas que se presentan en esta sección para la realización de un filtro *FIR* son: *Forma Directa I* y *Cascada*.

11.3.1 Forma Directa

Cuando los coeficientes de la estructura que se emplea para realizar el filtro, corresponden precisamente a los de la función de transferencia, a esta estructura se le conoce como *Forma Directa, filtro transversal* o *línea de retardo con derivación.*

Por ejemplo, un filtro *FIR* de longitud 3 definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)+b_3x(n-3) \qquad (11.3.3)$$

tiene la función de transferencia $H(z)$ que se muestra:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3} \qquad (11.3.4)$$

y se puede construir con la estructura de la *Forma Directa I* que se muestra en la Figura 11.15. A esta estructura se le conoce también como *filtro transversal* o *línea de retardo*.

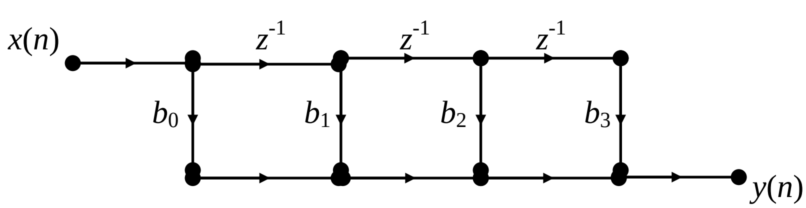


Figura 11.15 *Forma Directa I* para un filtro *FIR* de longitud 3.

Una *estructura equivalente* es aquella cuyo comportamiento de entrada-salida es el mismo que el de la estructura a la que se hace referencia. Una de las formas de obtener una *estructura equivalente* es mediante el método de *transposición*, el cual consiste en los siguientes pasos:

1. Invertir las trayectorias.
2. Sustituir los nodos de salida (generadores) por sumadores.
3. Intercambiar los nodos de salida y entrada.

Como ejemplo en la Figura 11.16 se muestra la *Estructura Transpuesta* del filtro de la Figura 11.15.

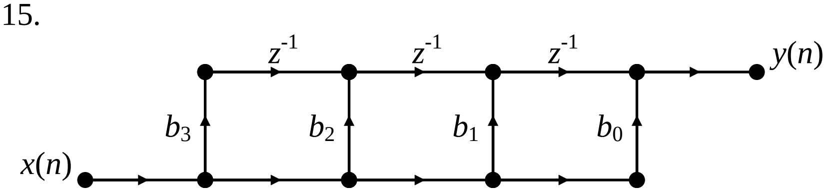


Figura 11.16 *Forma Transpuesta* para un filtro *FIR* de longitud 3

Las dos estructuras mostradas en las figuras anteriores son canónicas con respecto al número de retardos.

11.3.2 Cascada

Para producir una función de orden mayor se pueden usar varias secciones conectadas en cascada. Para lograr lo anterior, se factoriza $H(z)$ como se muestra a continuación:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{K} \left(1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}\right) \tag{11.3.5}$$

donde $K = (M-1)/2$ si M es impar, y $K = M/2$ si M es par con $\beta_{2k} = 0$. La factorización de $H(z)$ se puede hacer con la función *rotos* de MATLAB.

11.4 Efectos de la cuantificación de los coeficientes

El resultado del diseño de un filtro es una función de transferencia para la que hay que elegir una estructura de entre muchas. La estructura determina el ruido de cuantificación que se genera internamente en el sistema. Además algunas estructuras son mas sensibles que otras a perturbaciones de los coeficientes.

Si la estructura de realización es muy sensible a perturbaciones de los coeficientes, es posible que el sistema no satisfaga las especificaciones iniciales de diseño, o si el sistema es *IIR* podría convertirse en inestable.

De los estudios de sensitividad para sistemas *IIR* se ha encontrado que las *formas cascada* y *paralelo* son menos sensibles que las *formas directas*. Por esta razón se usan poco las *formas directas*, excepto para sistemas de segundo orden.

Sin embargo, para sistemas *FIR*, la forma directa es la que mas se usa. La razón es que para la mayoría de los filtros lineales *FIR*, los ceros están mas o menos distribuidos uniformemente en el plano z.

Frecuentemente el mejor método es simular el sistema y medir su desempeño. Por ejemplo, para análisis de errores, se elige la longitud de palabra tal que el sistema sea una realización suficientemente precisa del sistema, y que al mismo tiempo requiera de mínima complejidad de hardware o software.