14 Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Para secuencias de duración finita, es posible desarrollar una representación alterna de *Fourier*, conocida como la *Transformada Discreta de Fourier* (*TDF*). La *TDF* es una secuencia en lugar de una función de variable continua, y corresponde a muestras equidistantes en frecuencia, de la *Transformada de Fourier* de la señal. La *TDF* juega un papel importante en la realización de una gran variedad de algoritmos de procesamiento digital de señales.

14.1 Definición de la TDF

Dada una secuencia de duración finita $x(n)$, con $0 \le n \le N-1$, su *Transformada Z* es:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}, \qquad z \neq 0 \tag{14.1.1}$$

De la expresión (14.1.1) evaluada en $z = e^{j\omega}$, resulta:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\omega}, \qquad |\omega| < \pi \tag{14.1.2}$$

que es la *Transformada de Fourier* de $x(n)$, es decir, la *TF* de $x(n)$ se obtiene evaluando la *TZ* en el círculo unitario $e^{j\omega}$.

Tomando ahora N valores equidistantes de la *TF* en el círculo unitario ($e^{j2\pi/N}$), mediante la sustitución de ω en la expresión (14.1.2) por $\omega_k = 2\pi k/N$, se obtiene la siguiente relación:

$$X(k) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn}, \qquad 0 \le k \le N-1 \tag{14.1.3}$$

que se define como la *Transformada Discreta de Fourier* (*TDF*) de la secuencia $x(n)$. $X(k)$ es el k-ésimo coeficiente (con valor complejo) de la *TDF*, n es el *índice de tiempo* y k es el *índice de frecuencia*.

Como en el caso de la *Transformada de Fourier* (*DTFT*), la *Transformada Discreta de Fourier* (*TDF*) se puede aplicar tanto a *señales* (*secuencias*) como a *sistemas*. Por ejemplo, al sistema discreto mostrado en la Figura 14.1, se le puede aplicar la ecuación (14.1.3) como se muestra en la expresión (14.1.4):

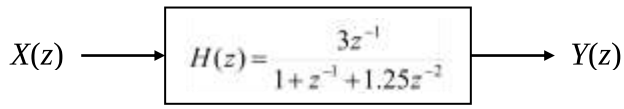

Figura 14.1 Sistema discreto con función de transferencia $H(z)$

$$H(k) = H(e^{j\omega})\,|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(2\pi/N)kn}, \qquad 0 \le k \le N-1 \qquad (14.1.4)$$

donde $h(n)$ es la respuesta al impulso del sistema, y $H(k) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi k/N}}$ es el k-ésimo coeficiente de la *TDF*.

Continuando con el ejemplo, para $N = 8$, la ecuación (14.1.4) tiene la interpretación geométrica que se muestra en las Figuras 14.2 a 14.4. En la Figura 14.2 se puede ver que la *TDF* de la secuencia $h(n)$ de 8 muestras es simplemente la *TZ* evaluada en 8 puntos equidistantes en el círculo unitario ($e^{j2\pi k/8}$), donde estos puntos están separados por 45º ($\angle e^{j2\pi/8}$).

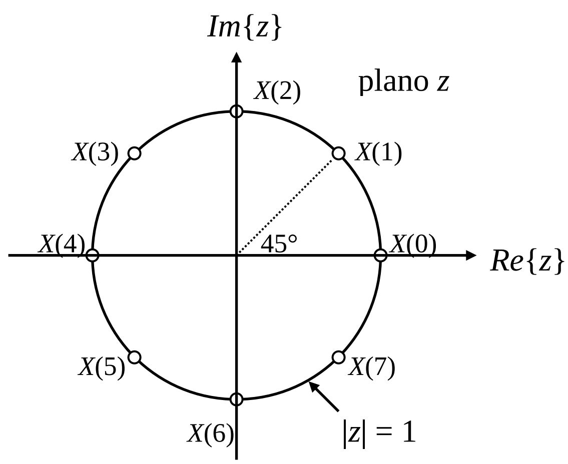

Figura 14.2 Puntos de muestreo en el plano z para obtener los valores de los coeficientes de la *Transformada Discreta de Fourier* para $N = 8$

En las Figuras 14.3 y 14.4 se pueden observar algunas de las muestras tomadas de la magnitud y de la fase, respectivamente, de la *TZ* de la secuencia $h(n)$. Dichas muestras corresponden a puntos localizados en la superficie generada por la *TZ*, la cual, por ser una superficie compleja, se encuentra separada en sus componentes de *magnitud* (Figura 14.3) y *fase* (Figura 14.4).

En la Figura 14.4 por la forma que adopta la superficie de la *fase* de la *TZ*, los valores de la fase correspondientes a los coeficientes $\angle X(0)$, $\angle X(4)$ y $\angle X(5)$ quedan ocultos por la misma. Lo mismo sucede con el valor de la magnitud del coeficiente $|X(5)|$ en la Figura 14.3.

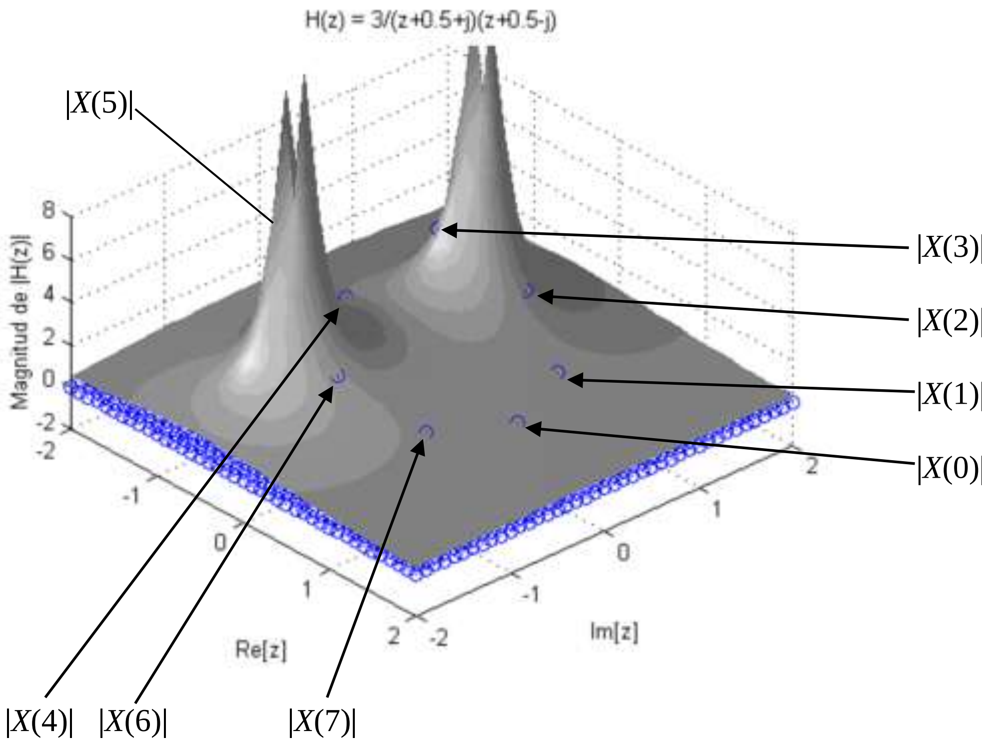

Figura 14.3 Gráfica que representa la interpretación geométrica del valor de la *magnitud* para cada coeficiente de la *TDF* de la secuencia $h(n)$ (asociada a la función de transferencia $H(z)$)

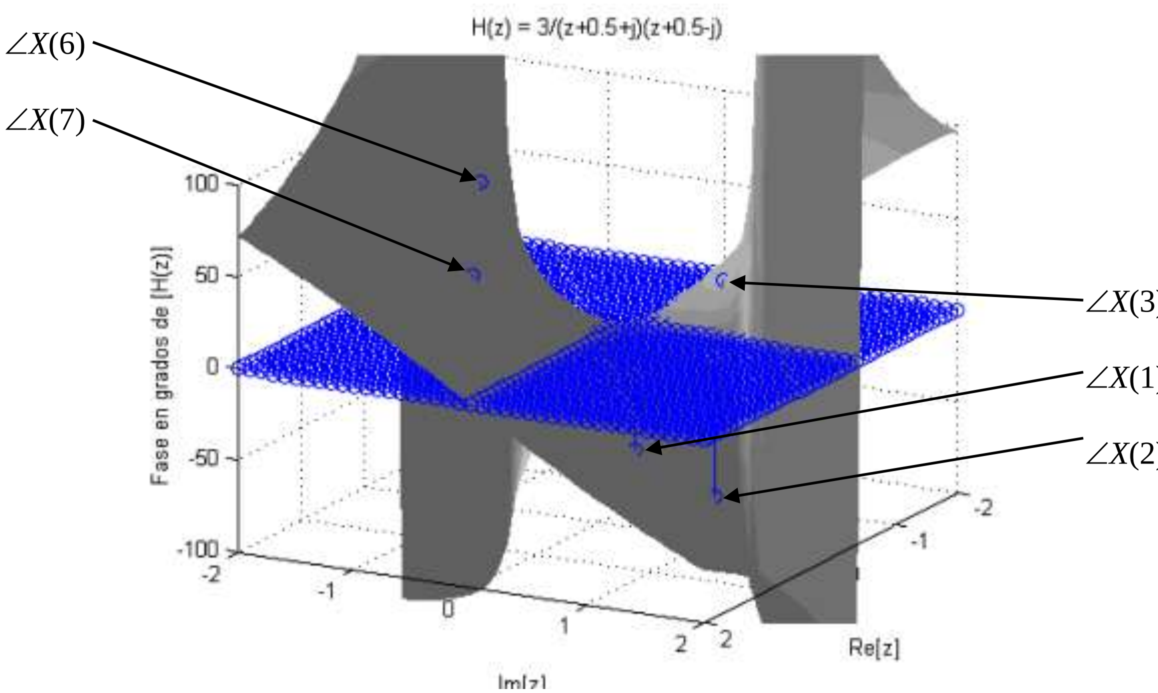

Figura 14.4 Gráfica que representa la interpretación geométrica del valor de la *fase* para algunos coeficiente de la *TDF* de la secuencia $h(n)$ (asociada a la función de transferencia $H(z)$)

En las Figuras 14.3 y 14.4 se puede observar que los coeficientes de la *TDF* para el ejemplo propuesto, corresponden a muestras de las superficies respectivas, tomadas en la intersección de un cilindro de radio unitario (círculo unitario en el plano z) con la superficie correspondiente. Cuando dichas muestras se grafican en un plano, resulta la gráfica mostrada en la Figura 14.5, en donde se presentan dichas muestras (coeficientes) para la magnitud y la fase de la *TDF* del ejemplo propuesto para $N = 8$.

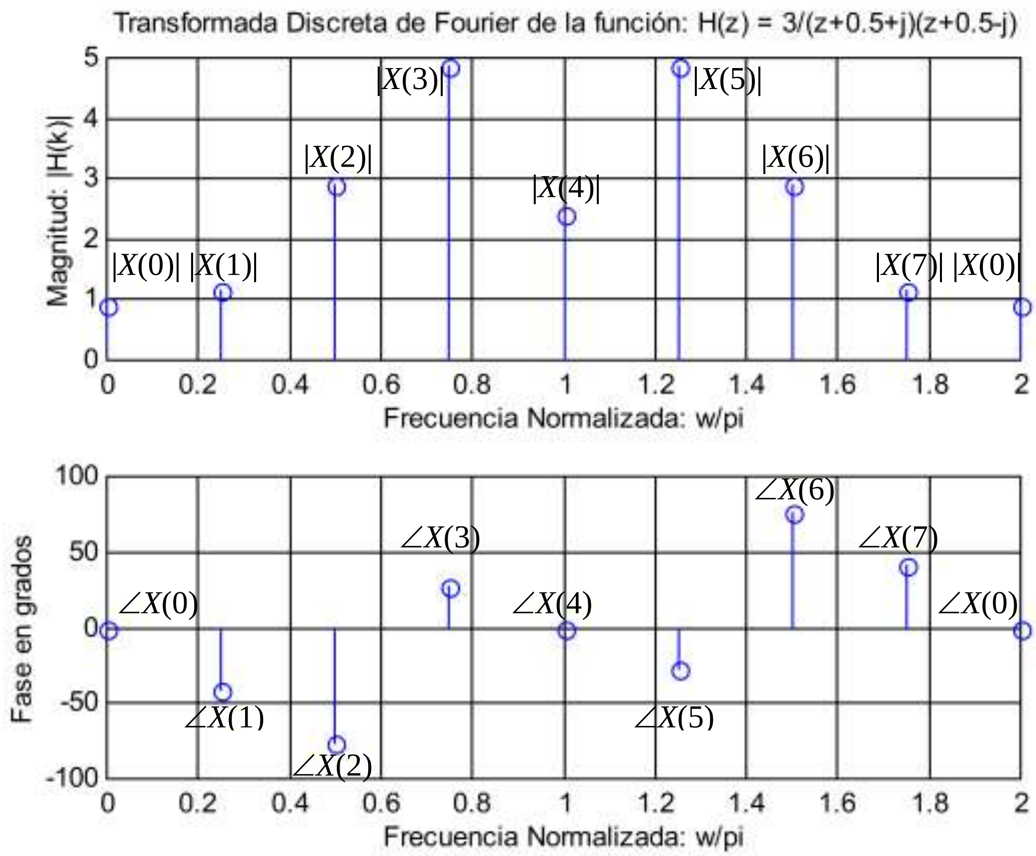

Figura 14.5 Gráfica de los coeficientes de la *Transformada Discreta de Fourier* de la secuencia $h(n)$, en sus componentes de magnitud y fase.

En la Figura 14.6 se presentan en un plano, las gráficas del contorno que se generan al intersectar el cilindro de radio unitario (círculo unitario en el plano z), con las superficies de la magnitud y de la fase de la *Transformada Z* de la secuencia $h(n)$. Esta intersección del cilindro con las superficies de la *TZ* corresponde a la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema propuesto como ejemplo. En dichas gráficas se puede observar claramente como los coeficientes de la *TDF* en sus componentes de magnitud y fase, corresponden efectivamente a muestras tomadas de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema propuesto.

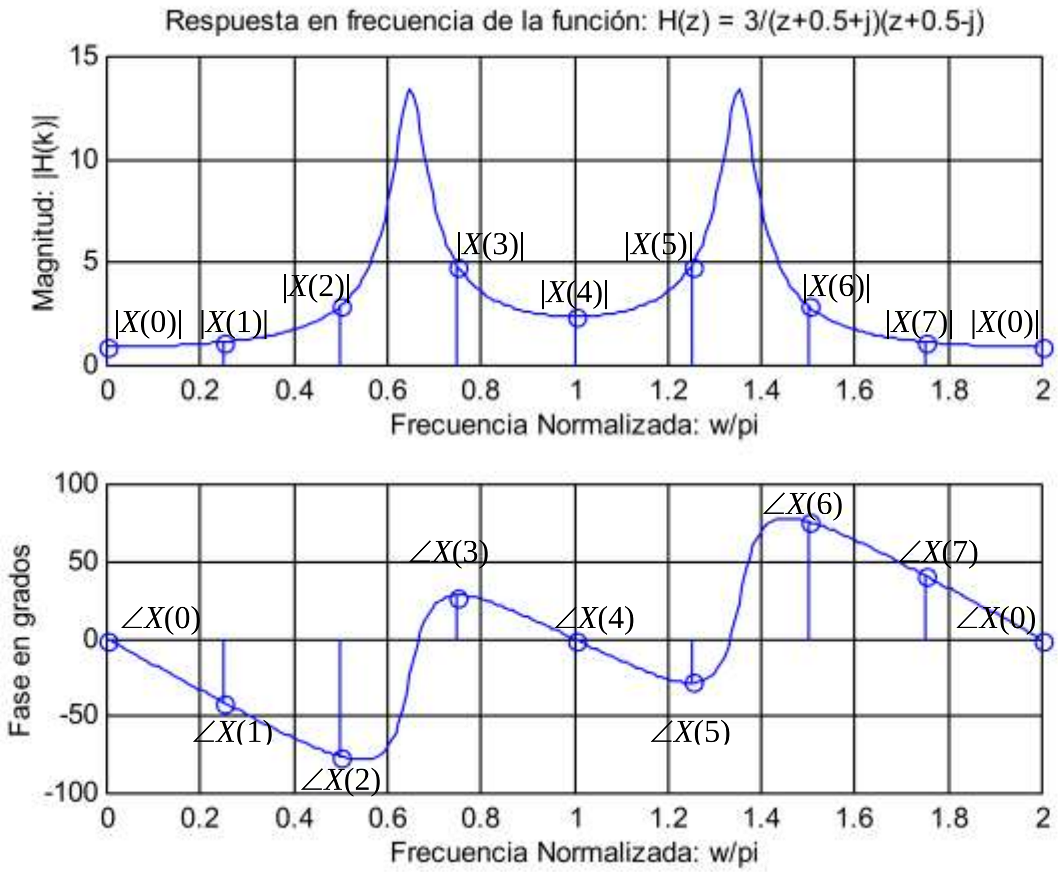

Figura 14.6 Gráfica de los coeficientes de la *Transformada Discreta de Fourier* de la secuencia $h(n)$, en sus componentes de magnitud y fase, como muestras de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema propuesto como ejemplo.

La *TDF* permite realizar un análisis en frecuencia de una secuencia de duración finita $x(n)$, $0 \leq n \leq N$-1. Conviene re-escribir la *TDF* definida en la expresión (14.1.3) como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \qquad 0 \leq k \leq N-1 \tag{14.1.4}$$

donde:

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \tag{14.1.5}$$

Las secuencias $\{W_N^{kn}\}$ son periódicas con período N, por lo que los coeficientes de la *TDF* son también periódicas con período N. La cantidad W_N es en realidad la enésima raíz del círculo unitario en el plano z, en el sentido de que:

$$W_N^N \equiv 1 \tag{14.1.6}$$

El conjunto de secuencias $\{W_N^{kn}\}$ también son *ortogonales*, lo que significa que tienen la propiedad de que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} W_N^{-r\,n} = \begin{cases} N, & k = r \\ 0, & k \neq r \end{cases} \tag{14.1.7}$$

De las expresiones (14.1.4) y (14.1.7), resulta:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \qquad 0 \leq n \leq N-1 \tag{14.1.8}$$

que se conoce como la *Transformada Discreta de Fourier Inversa* (*TDFI*), puesto que permite recuperar la secuencia original $x(n)$ para $0 \leq n \leq N$-1 a partir de los coeficientes $X(k)$ para $0 \leq k \leq N$-1.

14.2 Propiedades de la TDF

Como la *DTFT*, la *TDF* tiene propiedades útiles en aplicaciones de procesamiento de señales, algunas de las cuales se presentan a continuación:

1. **Linealidad**

Si dos secuencias de duración finita $x(n)$ y $y(n)$ se combinan linealmente, es decir:

$$z(n) = ax(n) + by(n), \qquad 0 \leq n \leq N-1 \tag{14.2.1}$$

donde a y b son escalares, entonces la *TDF* de $z(n)$ es:

$$Z(k) = aX(k) + bY(k), \qquad 0 \leq k \leq N-1 \tag{14.2.2}$$

Si $x(n)$ es de longitud N_1 y $y(n)$ de longitud N_2, entonces la longitud máxima de $z(n)$ será de $N_3 = max[N_1,N_2]$. Por lo tanto, las *TDF*'*s* $X(k)$ y $Y(k)$ se calculan para una longitud de N_3. La secuencia de menor longitud se aumenta con ceros (*zero padding*) hasta igualar su longitud a la de mayor longitud.

2. **Corrimiento circular**

Sea una secuencia $x(n)$ para $0 \le n \le 3$, y sea $x_M(n)$ para $0 \le n \le 3$ un conjunto de secuencias obtenidas por corrimientos circulares de $x(n)$ por m muestras (en el sentido contrario a las manecillas del reloj). Las secuencias corridas se obtienen como se muestra en la Figura 14.7. Se puede observar en dicha figura que $x_4(n) = x(n)$

1. $x_0(n) = x(n) = (\ x(0)\ \ x(1)\ \ x(2)\ \ x(3)\ )$
2. $(\ x(0)\ \ x(1)\ \ x(2)\ \ x(3)\ ) \longrightarrow x_1(n) = (\ x(3)\ \ x(0)\ \ x(1)\ \ x(2)\ )$
3. $(\ x(3)\ \ x(0)\ \ x(1)\ \ x(2)\ ) \longrightarrow x_2(n) = (\ x(2)\ \ x(3)\ \ x(0)\ \ x(1)\ )$
4. $(\ x(2)\ \ x(3)\ \ x(0)\ \ x(1)\ ) \longrightarrow x_3(n) = (\ x(1)\ \ x(2)\ \ x(3)\ \ x(0)\ )$

Figura 14.7 Corrimientos circulares de una secuencia $x(n)$

Para representar matemáticamente los corrimientos circulares se usa la notación *Módulo N*, como se indica a continuación:

$$x_m(n) = (x[n-m] \quad \text{mod} \quad N), \qquad 0 \le m, n \le N-1 \tag{14.2.3}$$

donde mod N denota *módulo N*. Como ejemplo para ilustrar este concepto, considérese $m = 2$ y $N = 4$. Entonces de la expresión (14.2.3) se obtiene:

$$x_2(n) = (x[n-2] \quad \text{mod} \quad 4) \tag{14.2.4}$$

que conduce a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
n=0; &\qquad x_2(0) = (x[-2] \quad \text{mod} \quad 4) = x[-2+4] = x(2) \\
n=1; &\qquad x_2(1) = (x[-1] \quad \text{mod} \quad 4) = x[-1+4] = x(3) \\
n=2; &\qquad x_2(2) = (x[0] \quad \text{mod} \quad 4) = x[0+4] = x(4) = x(0) \\
n=3; &\qquad x_2(3) = (x[1] \quad \text{mod} \quad 4) = x[1+4] = x(5) = x(1)
\end{aligned} \tag{14.2.5}$$

Por consiguiente:

$$x_2(n) = [x(2) \quad x(3) \quad x(0) \quad x(1)] \tag{14.2.6}$$

Dada una secuencia $x(n)$ para $0 \le n \le N-1$, con sus coeficientes respectivos de la *TDF* $X(k)$ para $0 \le n \le N-1$, se tiene que:

$$TDF(x[n-m] \quad \text{mod} \quad N) = W_N^{km} X(k), \qquad 0 \le k \le N-1 \tag{14.2.7}$$

donde $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$, y m es el tamaño del corrimiento circular.

3. Corolario de la expresión (14.2.7)

$$TDF[W_N^{-km} x(n)] = X([k-m] \quad \text{mod} \quad N) \tag{14.2.8}$$

4. Complejo Conjugado

Si la secuencia $x(n)$ para $0 \le n \le N-1$, y N es par, entonces:

$$X\left(\frac{N}{2}+m\right) = X^*\left(\frac{N}{2}-m\right) \tag{14.2.9}$$

donde m = 1, 2, ...,(N/2)-1. Por ejemplo, para N = 8, de la expresión (14.2.9) se obtiene:

$$X(5) = X^*(3), \quad X(6) = X^*(2), \quad X(7) = X^*(1)$$

es decir, es suficiente conocer la mitad de los coeficientes $X(k)$ para $0 \le k \le N/2$, para obtener el resto de los coeficientes $X(k)$ para $N/2 \le k \le N-1$.

5. Convolución circular

Si las secuencias reales o complejas $x(n)$ y $y(n)$ son de duración finita y ambas de longitud N, es decir, $0 \le n \le N-1$, su *convolución circular* se define como:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y([n-k] \quad \text{mod} \quad N) \tag{14.2.10}$$

o

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x([n-k] \quad \text{mod} \quad N) y(k), \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{14.2.11}$$

Es importante observar en la expresión (14.2.10), que la secuencia $y([n-k] \quad \text{mod} \quad 4)$ dentro de la sumatoria (el índice que varía es k), corresponde a la secuencia $y(n)$ invertida en tiempo, es decir, si $y(n) = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3)]$ como ejemplo, entonces, para n= 3 por ejemplo, la secuencia invertida en tiempo en función de k será: $y(3-k) = [y(3) \quad y(2) \quad y(1) \quad y(0)]$, $0 \le k \le N-1$.

Ejemplo 14.2.1

Determine los coeficientes de la convolución circular $z(n)$ para $0 \leq n \leq 3$, usando la expresión (14.2.10).

Solución.

La expresión (14.2.10) se utiliza para calcular los coeficientes de la convolución circular $z(n)$ de la siguiente manera:

para $n = 0$: $$z(0) = \sum_{k=0}^{3} x(k)\, y([-k] \mod 4)$$

en donde se usa la notación $y^o(n)$ para representar la secuencia invertida en tiempo $y([-k] \mod 4)$ que se encuentra dentro de la sumatoria. Evaluando esta secuencia invertida resulta:

$$y^o(n) = y([-k] \mod 4) = [\,y(0) \quad y(3) \quad y(2) \quad y(1)]$$

y multiplicándola finalmente por la secuencia $x(k)$ dentro de la sumatoria queda:

$$z(0) = x(0)y(0) + x(1)y(3) + x(2)y(2) + x(3)y(1)$$

Mediante un procedimiento similar al descrito anteriormente, aplicado para n = 1, 2 y 3, se obtiene:

$$z(1) = x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(3) + x(3)y(2)$$

$$z(2) = x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(3)$$

$$z(3) = x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0)$$

Observación:

Las secuencias $y([m-k] \mod 4)$ son versiones corridas circularmente de la secuencia invertida en tiempo $y^o(n)$, donde $1 \leq m \leq 3$ es el tamaño del corrimiento circular, es decir:

$$y^o(n) = y([m-k] \mod 4)$$

Conclusión:

La convolución circular es un proceso de multiplicación y suma de la secuencia $x(n)$ por la secuencia invertida $y^o(n)$, y por las secuencias corridas circularmente correspondientes.

Ejemplo 14.2.2

Dadas las secuencias siguientes:

$$x(n) = [\underset{\uparrow}{0} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

y

$$y(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

obtener $z(n) = x(n) \otimes y(n),$ para $0 \leq n \leq 5$.

Solución.

$$x(n) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$y^o(n) = [1 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2] \Rightarrow z(0) = 5$$

$$y_1^o(n) = [2 \quad 1 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3] \Rightarrow z(1) = 6$$

$$y_2^o(n) = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \quad 5 \quad 4] \Rightarrow z(2) = 1$$

$$y_3^o(n) = [4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \quad 5] \Rightarrow z(3) = 2$$

$$y_4^o(n) = [5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 6] \Rightarrow z(4) = 3$$

$$y_5^o(n) = [6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1] \Rightarrow z(5) = 4$$

$$y_6^o(n) = [1 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2] = y^o(n) \Rightarrow ALTO!$$

Por lo tanto:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) = \{\underset{\uparrow}{5} \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\}$$

14.3 Teorema de convolución circular

Dadas las secuencias $x(n)$ y $y(n)$ para $0 \leq n \leq N - 1$, se puede demostrar el siguiente teorema:

$$TDF[x(n) \otimes y(n)] = X(k)Y(k), \qquad para \quad 0 \leq k \leq n - 1 \tag{14.3.1}$$

Por lo tanto, de la expresión anterior se concluye que la convolución circular en el dominio del tiempo discreto es equivalente a la multiplicación en el dominio de la *TDF*. La ecuación (14.3.1) para calcular la convolución circular se puede representar como se indica en la Figura 14.8, donde $0 \leq n \leq N - 1$ y $0 \leq k \leq N - 1$.

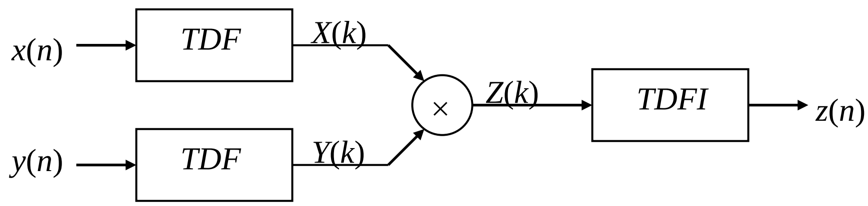

Figura 14.8 Convolución circular usando la *TDF*

14.4 Convolución lineal a través de la convolución circular

En la práctica se desea obtener la convolución lineal, debido a que ésta define la relación de entrada/salida de un sistema LTI.

El procedimiento para calcular la convolución lineal vía la convolución circular es el siguiente:

1. Extender las secuencias $x(n)$ para $0 \leq n \leq N_1 - 1$ y $y(n)$ para $0 \leq n \leq N_2 - 1$ con ceros, de tal manera que cada una de las secuencias tenga $(N_1 + N_2 - 1)$ muestras, que es el número de muestras a la salida de la convolución lineal.

2. Si las secuencias extendidas se denotan por $x'(n)$ y $y'(n)$ respectivamente, se puede mostrar que la convolución lineal de las secuencias originales $x(n)$ y $y(n)$, se puede calcular a través de la convolución circular de las secuencias extendidas $x'(n)$ y $y'(n)$, como se indica en la siguiente expresión:

$$z(n) = x'(n) \otimes y'(n), \qquad 0 \leq n \leq N - 1 \tag{14.4.1}$$

   donde $N = N_1 + N_2 - 1$, es decir, los coeficientes de la convolución lineal $z(n)$ se obtienen efectuando la convolución circular de las secuencias extendidas $x'(n)$ y $y'(n)$, esto es:

$$z(n) = \sum x'(n) y'([n-k] \quad \text{mod} \quad N), \qquad 0 \leq n \leq N - 1 \tag{14.4.2}$$

Ejemplo 14.4.1

Obtener la convolución lineal para las secuencias dadas por $x(n)$ para $0 \le n \le 1$ y $y(n)$ para $0 \le n \le 3$.

Solución.

Como $N_1 = 2$ (número de muestras de la secuencia $x(n)$) y $N_2 = 4$ (número de muestras de la secuencia $y(n)$), entonces el número de muestras de la secuencia resultante de la convolución tendrá una longitud dada por: $N = N_1 + N_2 - 1 = 5$. Por lo tanto, las secuencias originales se extienden con ceros, resultando las siguientes secuencias extendidas:

$$x'(n) = [x(0) \quad x(1) \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$y'(n) = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad 0]$$

Desarrollando ahora la convolución circular de las secuencias anteriores queda finalmente:

$$y'^{o}(n) = [y(0) \quad 0 \quad y(3) \quad y(2) \quad y(1)] \Rightarrow z(0) = x(0)y(0)$$

$$y'^{o}_{1}(n) = [y(1) \quad y(0) \quad 0 \quad y(3) \quad y(2)] \Rightarrow z(1) = x(0)y(1) + x(1)y(0)$$

$$y'^{o}_{2}(n) = [y(2) \quad y(1) \quad y(0) \quad 0 \quad y(3)] \Rightarrow z(2) = x(0)y(2) + x(1)y(1)$$

$$y'^{o}_{3}(n) = [y(3) \quad y(2) \quad y(1) \quad y(0) \quad 0] \Rightarrow z(3) = x(0)y(3) + x(1)y(2)$$

$$y'^{o}_{4}(n) = [0 \quad y(3) \quad y(2) \quad y(1) \quad y(0)] \Rightarrow z(4) = x(1)y(3)$$

$$y'^{o}_{5}(n) = [y(0) \quad 0 \quad y(3) \quad y(2) \quad y(1)] = y'^{o}(n) \Rightarrow ALTO!$$

La convolución lineal usando la *TDF* se puede representar como se indica en la Figura 14.9 utilizando el teorema de la convolución circular. Si la longitud inicial de $x(n)$ es N y la de $y(n)$ es M, las longitudes de las secuencias expandidas son $M + N - 1$.

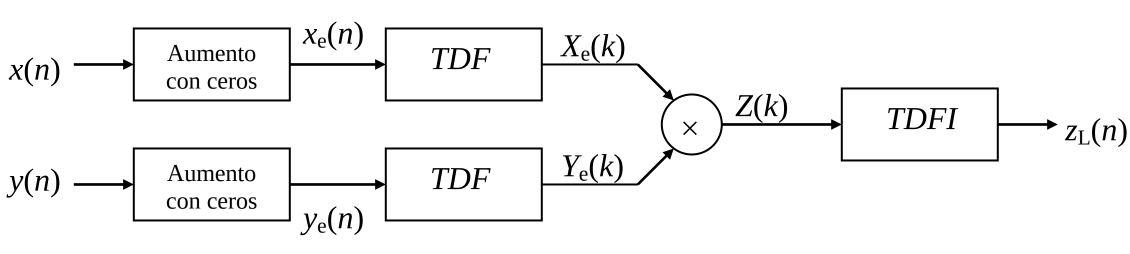

Figura 14.9 Convolución lineal usando la *TDF*

14.5 Cálculo de la TDF usando MATLAB

Hay cuatro funciones en MATLAB para calcular la *TDF* y la *TDFI*, y son las siguientes:

fft(x)
fft(x,N)
ifft(x)
ifft(x,N)

donde *x* es el vector que representa a la secuencia $x(n)$ y *N* es el número de muestras de la *TDF*. Si la longitud de la secuencia $x(n)$ es menor que *N*, la *TDF* correspondiente se completa con ceros, y se trunca si la longitud de la secuencia $x(n)$ es mayor que *N*, puesto que las longitudes de $x(n)$ y de su *TDF* deben ser las mismas.

Ejemplo 14.5.1

Realizar un programa en MATLAB para obtener y graficar la convolución lineal de la siguientes secuencias mediante los procedimientos indicados:

$x(n) = \{1\ 2\ 0\ 1\}$
$h(n) = \{2\ 2\ 1\ 1\}$

(a) A través del cálculo de la convolución circular de las mismas.
(b) Mediante el cálculo de la convolución lineal directa.

Graficar el error entre ambos cálculos.

Solución.

En MATLAB, el cálculo de la convolución mediante los dos procedimientos solicitados, se realiza de la siguiente manera:

(a) La convolución circular de las secuencias se obtiene como se indica a continuación:

//…

```
% Definición de las secuencias *************************
xn = [1 2 0 1];             % Primera secuencia de ejemplo
hn = [2 2 1 1];             % Segunda secuencia de ejemplo

% Cálculo de la longitud de la secuencia resultante *****
L = length(xn)+length(hn)-1;

% Cálculo de las TDF's aumentando con ceros *************
XE = fft(xn,L);
HE = fft(hn,L);

% Cálculo de la TDFI del producto de las secuencias *****
% (Cálculo de la Convolución Lineal a través de la
%              Convolución Circular)
```

```
ylcn = ifft(XE.*HE);
//...
```

(b) La convolución lineal directa de las secuencias se obtiene así:

```
//...
% Cálculo de la Convolución Lineal Directa
yldn = conv(xn,hn);
//...
```

El error se calcula como la diferencia entre las magnitudes de ambos cálculos de la convolución, como se muestra a continuación:

```
//...
% Cálculo del error entre los dos cálculos de la convolución
error = abs(ylcn)-abs(yldn);
//...
```

El programa completo en MATLAB se muestra a continuación. Las gráficas de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ se presentan en la Figura 14.10. Los resultados obtenidos de la convolución por los dos métodos, así como el error correspondiente, se muestran en las Figuras 14.11 y 14.12.

```
% ******************************************************
% Programa en Matlab para obtener la convolucion lineal
% de dos secuencias de duración finita, mediante el uso
% de la TDF:
%
% y(n) = x(n) .convolución. h(n)
%
% con:     x(n) = [1 2 0 1];  h(n) = [2 2 1 1]
%
% ******************************************************

clear all;

% Definición de las secuencias *************************

xn = [1 2 0 1];             % Primera secuencia de ejemplo

hn = [2 2 1 1];             % Segunda secuencia de ejemplo

% Cálculo de la longitud de la secuencia resultante *****

L = length(xn)+length(hn)-1;

% Cálculo de las TDF's aumentando con ceros ************

XE = fft(xn,L);
HE = fft(hn,L);



% Cálculo de la TDFI del producto de las secuencias ****
```

```
% (Cálculo de la Convolución Lineal a través de la
%              Convolución Circular)

ylcn = ifft(XE.*HE);

% Gráfica de la secuencias x(n) y h(n)

n = 0:3;

figure(1);

subplot (211);
stem(n,xn);
axis([0 6 0 2.5]);
title('x(n)');
grid on;

subplot (212);
stem(n,hn);
axis([0 6 0 2.5]);
title('h(n)');
xlabel('Indice de tiempo: n');
grid on;

% Gráfica de la secuencia ylc(n) generada por convolución
% circular

ne = 0:L-1;

figure(2);

subplot(211);
stem(ne,abs(ylcn));
axis([0 6 0 7]);
title('Magnitud de la Convolución Lineal ylc(n) calculada a través
de la Convolución Circular');
ylabel('Amplitud');
grid on;

% Cálculo de la Convolución Lineal Directa

yldn = conv(xn,hn);

% Gráfica de la secuencia yld(n) generada por Convolución
% Lineal Directa

subplot(212);
stem(ne,abs(yldn));
axis([0 6 0 7]);
title('Magnitud de la Convolución Lineal Directa: yld(n) =
conv[x(n),h(n)]');
xlabel('Indice de tiempo: n');
ylabel('Amplitud');
grid on;


% Cálculo y gráfica del error entre los dos cálculos de la
```

```
% convolución

figure(3);

error = abs(ylcn)-abs(yldn);

stem(ne,error);
title('Magnitud del error: ylc(n)-yld(n)');
xlabel('Indice de tiempo: n');
ylabel('Amplitud');
grid on;
```

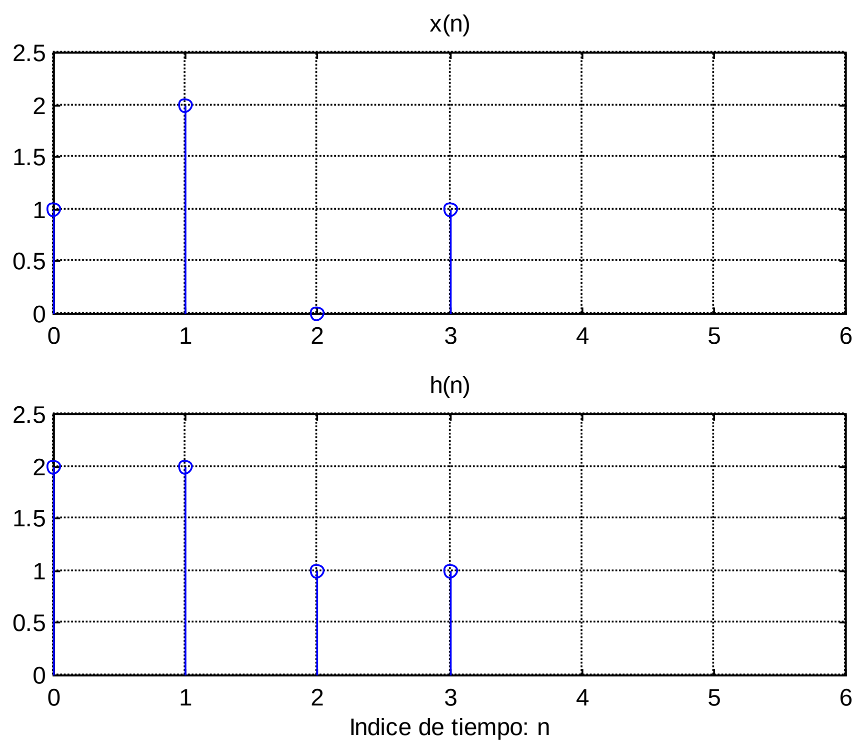

Figura 14.10 Gráficas de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$

En la Figura 14.11 se observa que la longitud de la secuencia resultante de la convolución $y(n)$ es de 7 muestras, lo cual correponde a $N = N_x + N_y - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$.

En la Figura 14.12 se puede observar que el error entre los cálculos de la convolución realizado por los dos métodos es mínimo, ya que es del orden de $|-2 \times 10^{-15}|$.

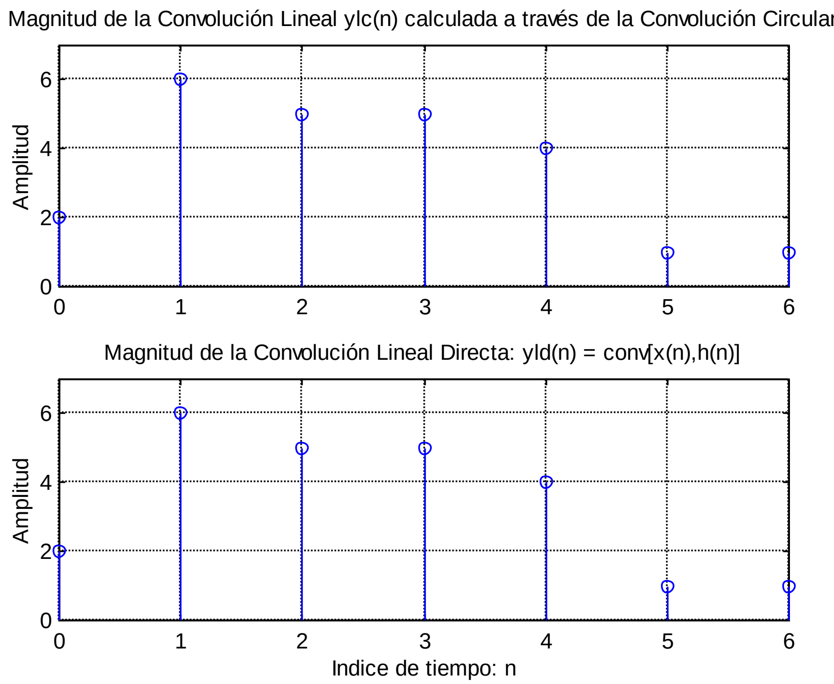

Figura 14.11 Gráficas de la convolución de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ calculada por dos métodos diferentes: a través de la Convolución Circular y mediante el cálculo de la Convolución Lineal Directa

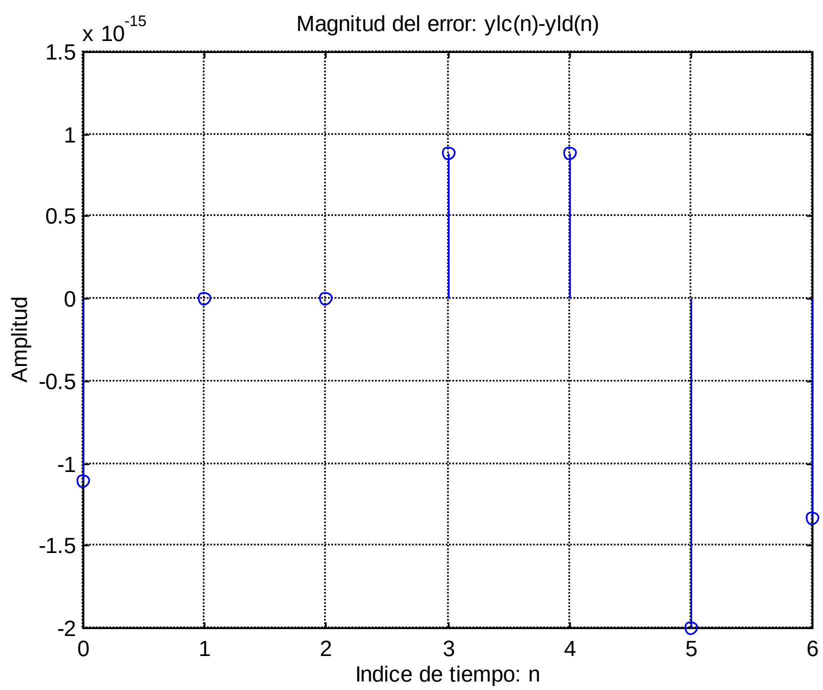

Figura 14.12 Gráfica del error entre las magnitudes de la convolución de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ calculada mediante los dos métodos del ejemplo 14.5.1