2 Señales en tiempo discreto

Dentro de los distintos tipos de señales existentes, solo se estudiarán las señales en tiempo discreto o señales discretas. Las señales continuas que se tomarán como base para explicar algunos conceptos como el muestreo, frecuencia analógica y digital, etc. se caracterizan por ser funciones continuas de una variable independiente, generalmente el tiempo. A estas señales también se les llama señales analógicas.

En este capítulo se presenta la definición de señales discretas y de algunas secuencias básicas para el estudio del procesamiento digital de señales. Dentro de estas secuencias básicas, se incluyen la *secuencia impulso unitario* y la *secuencia exponencial compleja* (secuencias sinusoidales), las cuales constituyen el fundamento para la representación de las señales y sistemas discretos. Finalmente se presenta una clasificación de las señales en tiempo discreto, basada en las propiedades de las mismas.

2.1 Definición de señales discretas

En la mayoría de las aplicaciones de los sistemas de procesamiento digital de señales, se requiere procesar señales analógicas, por lo cual es necesario tomar muestras de dichas señales a determinados intervalos de tiempo, generando de esta manera lo que se conoce como señales discretas, las cuales después de cuantificarlas o convertirlas a un formato digital, se les llamará señales digitales.

En la Figura 2.1 se presenta un sistema que permite emplear un bloque *muestreador* para muestrear una señal analógica $x_a(t)$ mediante una señal de muestreo $s(t)$, obteniendo una señal de tiempo discreto $x(n)$, la cual, a su vez, se aplica a un bloque *cuantificador/codificador* para obtener la señal digital $x_d(n)$.

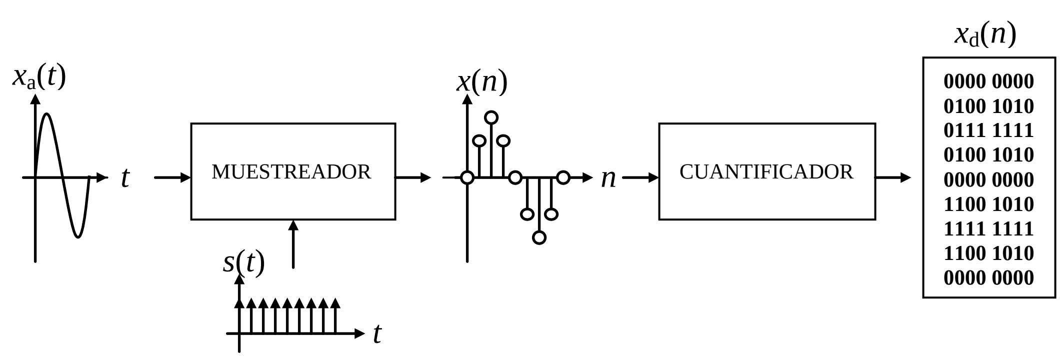


Figura 2.1 Sistema de conversión de una señal analógica $x_a(t)$ a un señal $x_d(n)$ con formato digital.

Aunque mas adelante se tratará con mayor detalle el tema del muestreo, en este momento se definirá una señal discreta $x(n)$ como una función discreta de una variable independiente discreta, es decir, es una función que tomará valores definidos solamente en ciertos instantes de tiempo. Se hace notar que, a diferencia de las señales continuas en la cual la variable independiente también es continua (el tiempo t), en las señales discretas la variable independiente será un múltiplo entero de una cierta unidad de tiempo T constante, lo cual se representará con la notación nT, donde T podrá tener cualquier valor (por ejemplo: 1 seg., 0.23 seg,. 1 hr., 1 mseg., 30 hrs., 2 días, etc.), mientras que n siempre será un número entero $(-\infty < n < \infty)$. Si solamente se usa el índice n como variable independiente, entonces la señal así representada se convierte en una función de una variable entera, también llamada secuencia de números.

Como ejemplo, en la Figura 2.2 se muestra la función escalón unitario de tiempo continuo definido como $u_a(t)$, la cual tendrá su contraparte como función escalón unitario de tiempo discreto $u_a(nT)$. Como la unidad de tiempo T generalmente es constante y conocida para una determinada aplicación, la notación empleada nT se suele sustituir únicamente con la variable independiente n. Entonces, la secuencia escalón unitario tendrá la notación $u(n)$.

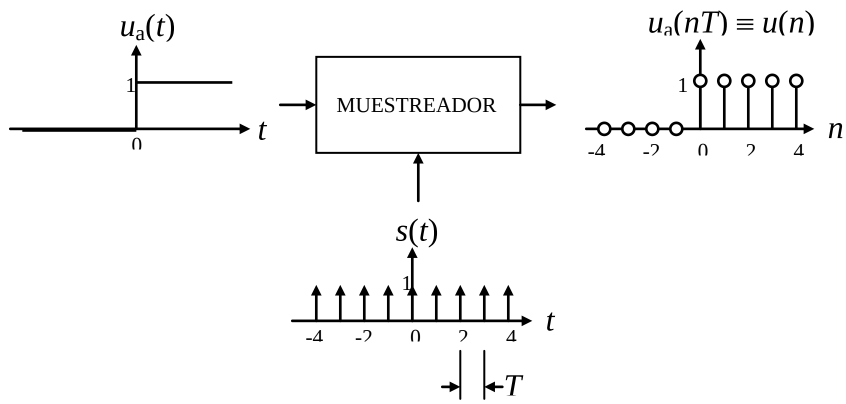


Figura 2.2 Función escalón unitario de tiempo continuo $u_a(t)$ y de tiempo discreto $u(n)$

Es importante aclarar que no necesariamente las señales de tiempo discreto siempre deben obtenerse del muestreo de señales analógicas. Las señales de tiempo discreto pueden generarse de manera independiente.

2.2 Secuencias básicas

A continuación se presenta la definición y la gráfica correspondiente de algunas secuencias básicas útiles para el estudio de las señales y sistemas discretos.

1. **Secuencia impulso unitario** (Figura 2.3a):

$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1, & para \quad n = 0 \\ 0, & para \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

2. **Secuencia escalón unitario** (Figura 2.3b):

$$u(n) \equiv \begin{cases} 1, & para \quad n \geq 0 \\ 0, & para \quad n < 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

3. **Secuencia rampa** (Figura 2.3c):

$$u_r(n) \equiv \begin{cases} n, & para \quad n \geq 0 \\ 0, & para \quad n < 0 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

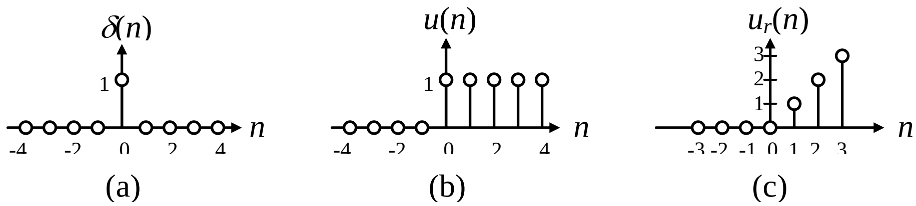


Figura 2.3 Secuencias básicas: (a) impulso unitario; (b) escalón unitario y (c) rampa

4. **Secuencia exponencial**

$$x(n)=a^n \tag{2.2.4}$$

Si a es real, entonces la secuencia $x(n)$ será una secuencia real. Las representaciones gráficas de la secuencia $x(n)$ para diferentes valores reales del parámetro a, se muestran en la Figura 2.4.

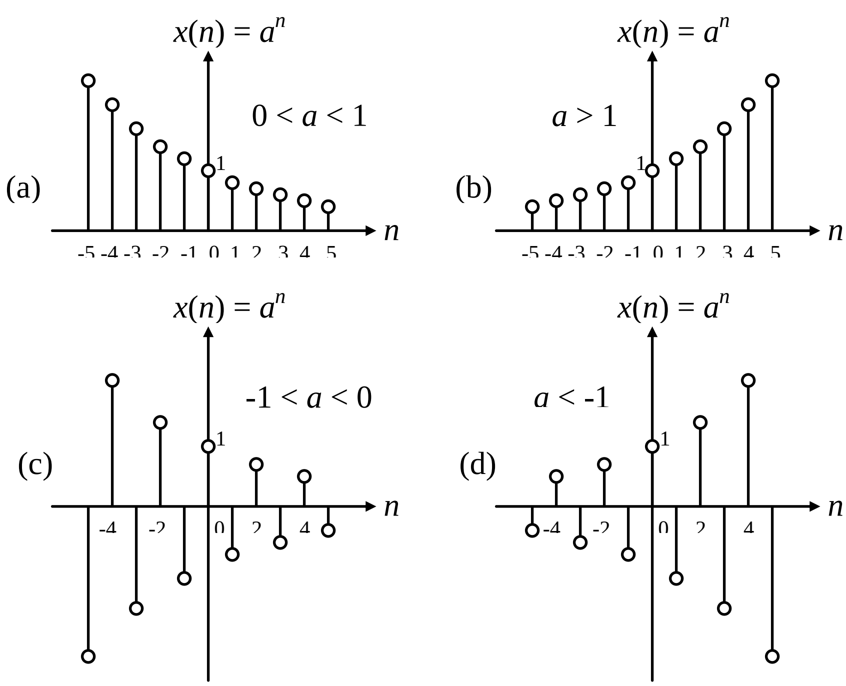


Figura 2.4 Representaciones de la función exponencial $x(n)=a^n$ para diferentes valores reales de a: (a) $0 < a < 1$; (b) $a > 1$; (c) $-1 < a < 0$ y (d) $a < -1$

5. **Secuencia sinusoidal real** (Figura 2.5a)

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi) \qquad (2.2.5)$$

La representación gráfica de la expresión anterior se muestra en la Figura 2.5a, para el caso particular en el cual $\omega_0 = \pi/6$ y $\phi = 0$.

6. **Secuencia exponencial compleja** (Figra 2.5b)

$$x(n) = Ae^{j(\omega_0 n+\phi)} = A\cos(\omega_0 n+\phi) + jA\sin(\omega_0 n+\phi) \qquad (2.2.6)$$

Esta secuencia, por ser compleja, se puede representar mediante sus componentes real e imaginaria, como se muestra en las siguientes expresiones:

$$x_R(n) = \mathrm{Re}\{x(n)\} = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega_0 n+\phi)}\} = A\cos(\omega_0 n+\phi) \qquad (2.2.7)$$

$$x_I(n) = \mathrm{Im}\{x(n)\} = \mathrm{Im}\{Ae^{j(\omega_0 n+\phi)}\} = A\sin(\omega_0 n+\phi) \qquad (2.2.8)$$

La representación gráfica de las expresiones anteriores se muestra en la Figura 2.5b, para el caso particular en el cual $\omega_0 = \pi/6$ y $\phi = 0$.

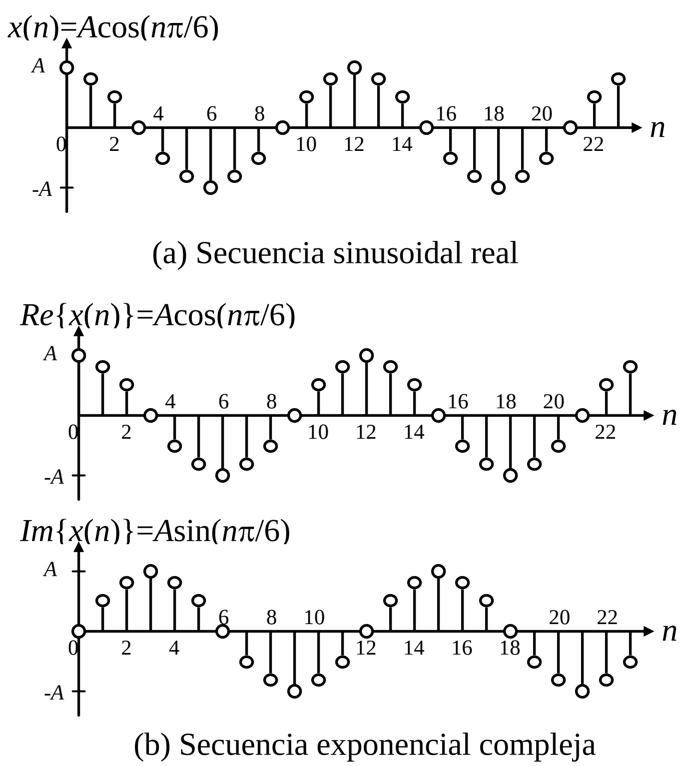


Figura 2.5 Representación gráfica de: (a) secuencia sinusoidal real: $x(n) = A\cos(n\pi/6)$; (b) secuencia exponencial compleja: $x(n) = e^{j\pi n/6}$

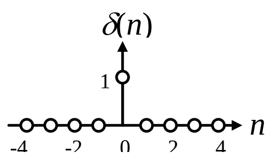
La representación matemática correspondiente a las componentes real e imaginaria de la secuencia exponencial compleja: $x(n) = e^{j\pi n/6}$, mostradas en la Figura 2.5b, es la siguiente:

$$x_R(n) = \mathrm{Re}\{e^{j(\pi n/6)}\} = \cos(\pi n/6)\,]$$
$$x_I(n) = \mathrm{Im}\{e^{j(\pi n/6)}\} = \sin(\pi n/6) \tag{2.2.9}$$

2.3 La secuencia impulso

La secuencia impulso resulta ser la secuencia mas importante en el estudio del procesamiento digital de señales, debido a que constituye el fundamento de las señales y sistemas discretos. Por lo anterior, una buena comprensión del comportamiento de dicha secuencia, ayudará en el estudio de las señales y sistemas discretos.

Como se presentó en la sección anterior, la secuencia impulso se define como:



$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1, & para \quad n = 0 \\ 0, & para \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

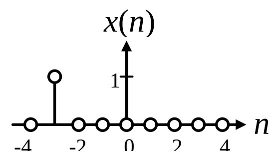
es decir, la función $\delta(n)$ tendrá el valor de “1” solamente cuando su argumento n tenga el valor de 0. Por lo tanto, si el argumento fuera una expresión (por ejemplo: n+3), entonces la función $\delta(n+3)$ tendrá el valor de “1” cuando n tenga el valor de -3 (debido a que para este valor de n, el argumento de la función $\delta(n+3)$ toma el valor de cero). Para este ejemplo, la secuencia impulso quedará desplazada tres unidades a la izquierda en la recta numérica (eje de la variable independiente entera n), como se muestra en la Figura 2.6a.

Este comportamiento de la secuencia impulso permitirá representar cualquier señal discreta (secuencia discreta), mediante la *suma ponderada* de varias secuencias impulso. *Suma ponderada* significa que la *amplitud* (el valor de “1” unidad de la secuencia impulso), se multiplicará por un coeficiente cuyo valor corresponderá a la secuencia discreta que se quiera representar. Como ejemplos se muestran dos secuencias expresadas como *sumas ponderadas* de la función impulso en las Figuras 2.6b y 2.6c.

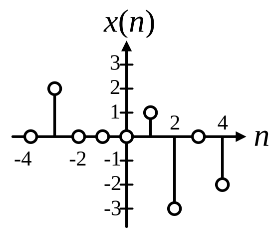
Para poder generalizar la representación de cualquier secuencia, la secuencia de la Figura 2.6b se puede representar como:

$$x(n)=a_{-3}\delta(n+3) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_4\delta(n-4) \quad ; \qquad \text{con } a_{-3}=2,\ a_1=1,\ a_2=-3 \text{ y } a_4=-2$$

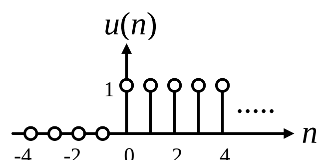
y en general, cualquier secuencia se representará mediante la expresión general:



(a) $x(n) = \delta(n+3)$



(b) $x(n)=2\delta(n+3) + \delta(n-1) - 3\delta(n-2) - 2\delta(n-4)$

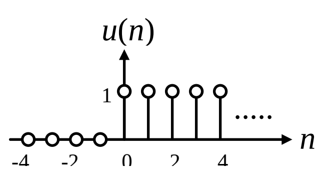


(c) $u(n)=\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + ...$

Figura 2.6 Representación de secuencias discretas mediante la *suma ponderada* de secuencias impulso

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{2.3.2}$$

Por ejemplo, la secuencia escalón unitario de tiempo discreto se expresará como:



$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \tag{2.3.3}$$

2.4 Señales sinusoidales continuas y discretas

Cuando se trabaja con señales sinusoidales continuas, la frecuencia se define en función de la variable independiente, que en este caso está representada por el tiempo continuo t. La frecuencia se define, por lo tanto, como el número de ciclos de la señal sinusoidal por unidad de tiempo, la cual generalmente es el *segundo*. Así, la frecuencia de dichas señales se expresará en unidades de *radianes*/*segundo* ó *ciclos*/*segundo* (1 *ciclo* = 2π *radianes*).

Por ejemplo, la señal sinusoidal $x_a(t)=A\cos(\Omega\, t)=A\cos(2\pi Ft)$, tiene una frecuencia de Ω *rad/seg* ó F *ciclos/seg*, donde el rango de frecuencia válido para estas señales es desde 0 hasta ∞, es decir: $0 \le \Omega \le \infty$ *rad/seg*, ó $0 \le F \le \infty$ *ciclos/seg*. Para algunos análisis matemáticos, se considerarán también frecuencias negativas, por lo cual el rango de frecuencias para las señales sinusoidales se extenderá en dichos casos desde $-\infty$ hasta $+\infty$, como se muestra en la Figura 2.7.

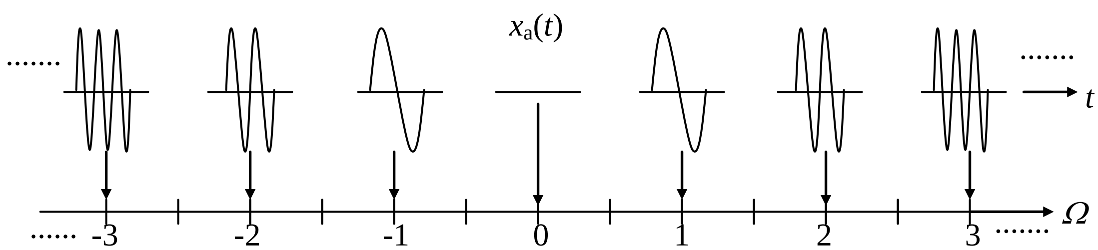


Figura 2.7 Efecto de la frecuencia en una señal sinusoidal de tiempo continuo $x_a(t)$

Para comprender el concepto de frecuencia en las señales sinusoidales discretas, es necesario observar cómo se encuentra definida la variable independiente en este tipo de señales. La variable independiente para las señales sinusoidales discretas es siempre un múltiplo entero n de una cierta unidad de tiempo T seleccionada, es decir, en este caso la variable independiente nT no será una variable independiente continua, sino una variable independiente discreta periódica con período T. En la mayoría de los casos esta variable independiente periódica T (constante para una aplicación determinada), corresponde al período de muestreo utilizado para muestrear una cierta señal (analógica ó digital), como se indica en la Figura 2.8, y la frecuencia asociada a este período de muestreo se le conoce como *frecuencia de muestreo*.

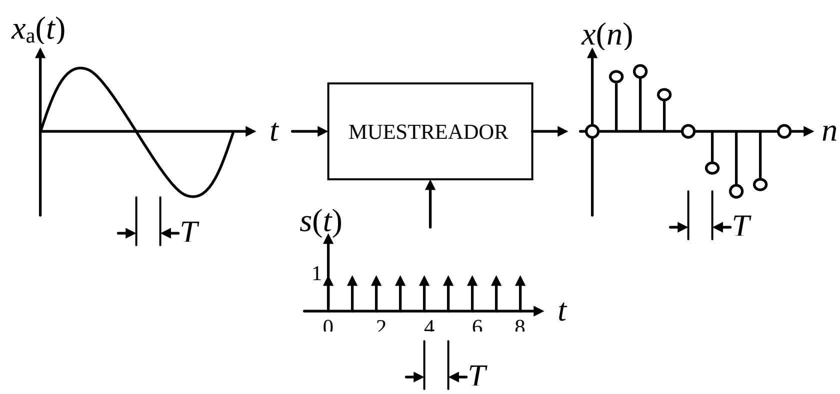


Figura 2.8 Muestreo de una señal sinusoidal analógica con una frecuencia de muestreo $1/T$.

Es importante resaltar que la frecuencia es un parámetro que se define de manera relativa a la variable independiente utilizada. Por lo tanto, la frecuencia de señales sinusoidales discretas se define como el número de ciclos de la señal sinusoidal por unidad de tiempo discreto (nT o simplemente n, ya que T es constante). En este caso, a la unidad de tiempo discreto (n), se le llamará *una muestra* (lo análogo a *un segundo* para las señales sinusoidales continuas). Así, la frecuencia de dichas señales se expresará en unidades de *radianes*/*muestra* ó *ciclos*/*muestra*, teniendo siempre presente que la palabra *muestra* se refiere a la unidad de tiempo discreto (n), o equivalentemente al período de muestreo normalizado (Tn/T).

Por convención, la frecuencia de señales sinusoidales continuas se representará con la letra Ω (*radianes/segundo*) ó F (*ciclos/segundo*), mientras que la frecuencia de señales sinusoidales de tiempo discreto se representará con la letra ω (*radianes/muestra*) ó f (*ciclos/muestra*).

Por ejemplo, la señal sinusoidal de tiempo discreto $x(n)= A\cos(\omega n) = A\cos(2\pi fn)$, tiene una frecuencia de ω *rad*/*muestra* ó f *ciclos*/*muestra*, donde el rango de frecuencia válido para estas señales es desde 0 hasta π, es decir: $0 \leq \omega \leq \pi$ *rad/seg*, ó $0 \leq f \leq 1/2$ *ciclos/seg*. Esta restricción en el rango de frecuencia, la cual es una propiedad de las señales en tiempo discreto, se explicará con mayor detalle en la siguiente sección. Para algunos análisis matemáticos, se considerarán también frecuencias negativas, por lo cual el rango de frecuencias para las señales sinusoidales de tiempo discreto se extenderá en dichos casos a $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ($-1/2 \leq f \leq 1/2$) ó de $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ($0 \leq f \leq 1$), como se muestra en la Figura 2.9.

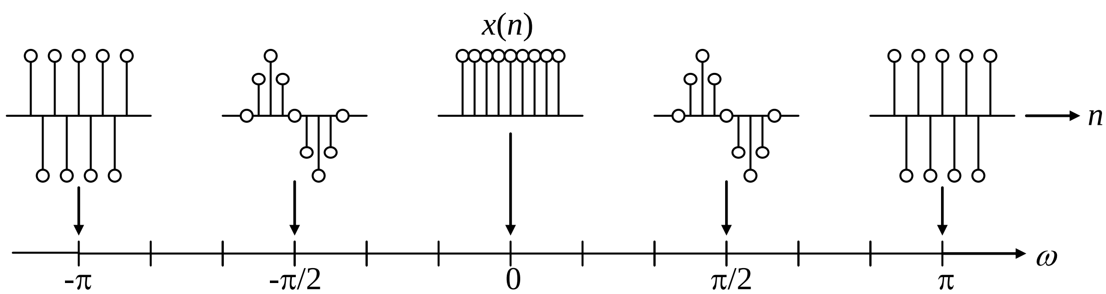


Figura 2.9 Efecto de la frecuencia en una señal sinusoidal de tiempo discreto $x(n)$

2.5 Propiedades de las señales sinusoidales en tiempo discreto

A continuación se presentan algunas propiedades de las señales discretas periódicas. Estas propiedades son útiles para el estudio de las señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia, es decir, para conocer el comportamiento en frecuencia de dichas señales y sistemas.

1. **Una señal sinusoidal en tiempo discreto es periódica sólo si su frecuencia f es un número racional**.

   Una señal discreta $x(n)$ será periódica con período fundamental N si se cumple que $x(n) = x(n+N)$, para todo n con N entero mayor que cero. Por lo tanto, para que una señal sinusoidal con frecuencia f_0 sea periódica, se debe cumplir lo siguiente:

$$\cos(2\pi f_0(N+n)+\phi) = \cos(2\pi f_0 n+\phi) \qquad (2.5.1)$$

lo cual solo ocurrirá cuando exista un número entero k que satisfaga la relación $2\pi f_0 N = 2k\pi$, porque al desarrollar la parte izquierda de la expresión (2.5.1) utilizando identidades trigonométricas, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\cos(2\pi f_0(N+n)+\phi) &= \cos((2\pi f_0 n+\phi)+2\pi f_0 N)\\ &= \cos(2\pi f_0 n+\phi)\cos(2\pi f_0 N)-\sin(2\pi f_0 n+\phi)\sin(2\pi f_0 N)\end{aligned}$$

ahora, como se debe cumplir que $2\pi f_0 N = 2k\pi$, con k entero, entonces resulta:

$$\cos(2\pi f_0(N+n)+\phi) = \cos(2\pi f_0 n+\phi)\cos(2\pi k)-\sin(2\pi f_0 n+\phi)\sin(2\pi k)$$

y como $\cos(2\pi k) = 1$ y $\sin(2\pi k) = 0$ para cualquier k entero, se llega finalmente a la expresión (2.5.2):

$$\cos(2\pi f_0(N+n)+\phi)=\cos(2\pi f_0 n+\phi)(1)-\sin(2\pi f_0 n+\phi)(0)=\cos(2\pi f_0 n+\phi) \qquad (2.5.2)$$

Una expresión equivalente a la condición anterior $2\pi f_0 N = 2k\pi$, será:

$$f_0 \equiv k/N \qquad (2.5.3)$$

donde k y N son números enteros, y f_0 por lo tanto se expresará como un número racional, es decir, como el cociente de dos enteros.

Ejemplo 2.5.1

Determinar si las siguientes señales son periódicas y, en caso de que lo sean, obtener su período fundamental:

(a) $x_1(n) = \sin(0.05\pi n)$, para $-\infty \leq n \leq \infty$.
(b) $x_2(n) = \sin(0.6n)$, para $-\infty \leq n \leq \infty$.

Solución.

Para determinar si las señales son periódicas, se debe buscar un número entero k que satisfaga la expresión dada en (2.5.3), de tal manera que la frecuencia de cada señal se pueda representar como el cociente de los dos números enteros k y N.

(a) En la expresión $x_1(n) = \sin(0.05\pi n)$, se observa que $\omega_0 = 0.05\pi$. Por lo tanto, aplicando la expresión dada en (2.5.3), resulta:

$2\pi f_0 = 2\pi k/N$, o bien: $\omega_0 = 2\pi k/N$

Entonces, despejando N y sustituyendo valores numéricos queda:

$$N = \frac{2\pi k}{0.05\pi} = 40k$$

Por lo tanto, la condición anterior se cumple para k = 1 (entero), lo cual significa que la señal $x_1(n)$ es periódica y su período fundamental N es de 40 muestas. La gráfica correspondiente a la función $x_1(n)$ puede observarse en la Figura 2.10a, la cual se realizó en MATLAB con el Programa 2.5.1 que se encuentra en el Apéndice A.

(b) En la expresión $x_2(n) = \sin(0.06n)$, se observa que $\omega_0 = 0.06$. Aplicando nuevamente la expresión dada en (2.5.3), resulta:

$$N = \frac{2\pi k}{0.06} \Rightarrow nunca \quad es \quad entero$$

Por lo tanto, no existe un valor de k (entero) para el cual se obtenga un valor de N entero, lo cual significa que la señal $x_2(n)$ no es periódica. La gráfica correspondiente a la función $x_2(n)$ puede observarse en la Figura 2.10b, , la cual también se realizó en MATLAB con el Programa 2.5.1 que se encuentra en el Apéndice A.

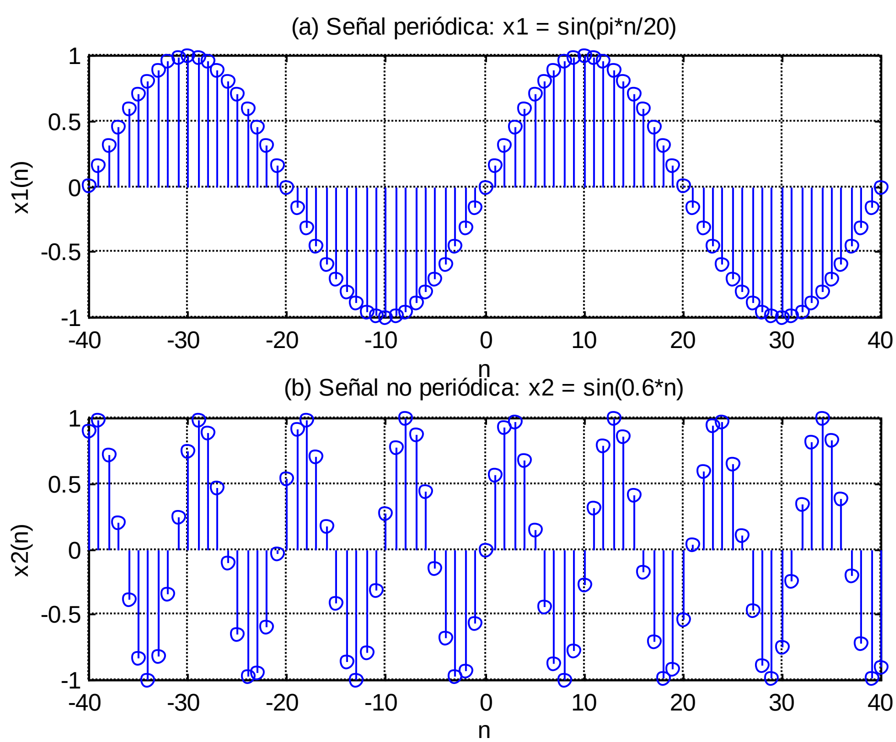


Figura 2.10 Señales sinusoidales de tiempo discreto: (a) secuencia periódica y (b) secuencia no periódica

Obsérvese en la Figura 2.10b que, aunque la envolvente de la señal sinusoidal de tiempo discreto aparentemente es periódica, no existe un número entero N (período fundamental) para el cual un par de muestras tengan el mismo valor de manera periódica.

2. **Las señales sinusoidales discretas cuyas frecuencias estén separadas por un múltiplo entero de 2π, son idénticas**.

$$\cos((\omega_0+2\pi)n+\phi)=\cos(\omega_0 n+\phi) \qquad (2.5.4)$$

Al desarrollar la expresión (2.6.4) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\cos((\omega_0+2\pi)n+\phi)&=\cos(\omega_0 n+2\pi n+\phi)= \cos((\omega_0 n+\phi)+2\pi n)\\ &=\cos(\omega_0 n+\phi)\cos(2\pi n)-\sin(\omega_0 n+\phi)\sin(2\pi n)\\ &= \cos(\omega_0 n+\phi)(1)-\sin(\omega_0 n+\phi)(0)\end{aligned}$$

por lo tanto, queda demostrada la expresión (2.5.4):

$$\cos((\omega_0+2\pi)n+\phi)=\cos(\omega_0 n+\phi)$$

Esta expresión implica que todas las señales sinusoidales discretas cuyas frecuencias sean múltiplos entre si por un factor de 2π serán idénticas, es decir, las siguientes señales sinusoidales $x_k(n)$:

$$x_k(n)= A\cos(\omega_k n + \phi), \qquad k = 0,1,2,3,... \quad ; \quad \omega_k = \omega_0 + 2\pi k \quad ; \quad -\pi \leq \omega_0 \leq \pi$$

son idénticas.

Ejemplo 2.5.2

Graficar las siguientes señales sinusoidales de tiempo discreto:

(a) $x_1(n) = \sin([0.1\pi]n)$, para $-\infty \leq n \leq \infty$.
(b) $x_2(n) = \sin([0.1\pi + 2\pi]n)$, para $-\infty \leq n \leq \infty$.

Solución.

La función $x_1(n) = \sin([0.1\pi]n)$ tiene una frecuencia $\omega_1 = 0.1\pi$ y su gráfica se muestra en la Figura 2.11a, mientras que la función $x_2(n) = \sin([0.1\pi + 2\pi]n)$ tiene una frecuencia $\omega_2 = 0.1\pi + 2\pi = \omega_1 + 2\pi$ y su gráfica se muestra en la Figura 2.11b. Obsérvese que ambas señales sinusoidales son idénticas. Las gráficas se realizaron en MATLAB con el Programa 2.5.2 que se encuentra en el Apéndice A.

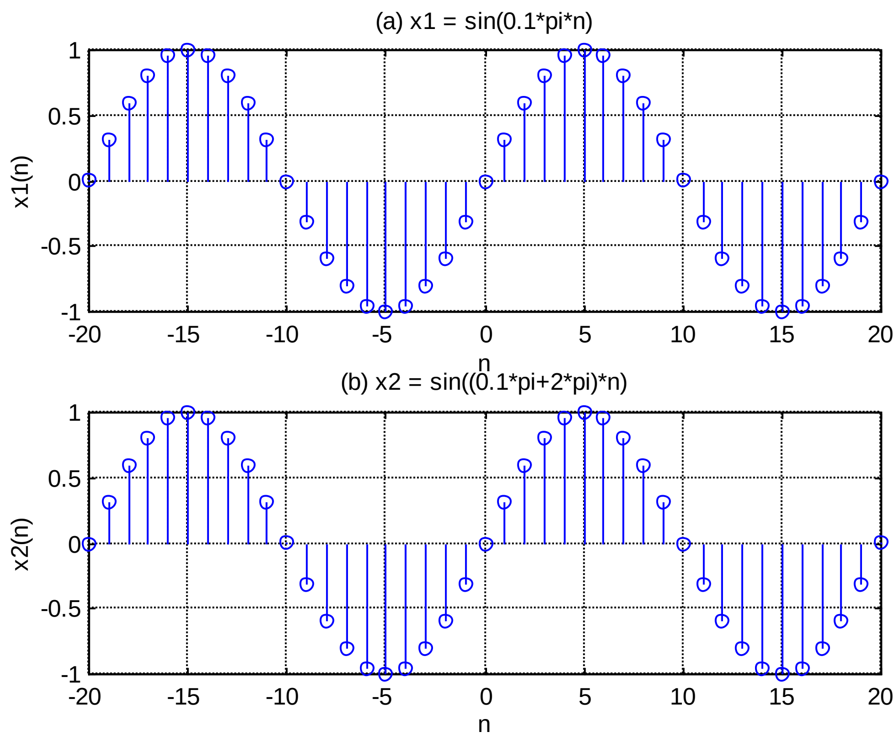


Figura 2.11 Señales sinusoidales de tiempo discreto con sus frecuencias separadas un múltiplo entero de 2π

3. Las señales sinusoidales discretas tendrán una frecuencia máxima cuando ω=π (o ω=-π).

Una propiedad importante de las señales discretas, la cual las distingue de las señales analógicas, es que su frecuencia sólo puede variar de -π *radianes/muestra* a +π *radianes/muestra* (–1/2 *ciclos/muestra* a +1/2 *ciclos/jmuestra*). Esta restricción se explica a continuación.

Partiendo de una señal sinusoidal de tiempo continuo como la que se indica en (2.5.5):

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \phi) = A\cos(2\pi F t + \phi) \qquad (2.5.5)$$

se muestrea cada T segundos (frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$), obteniendo la señal sinusoidal de tiempo discreto mostrada en (2.5.6) y (2.5.7).

$$\begin{aligned} x_a(nT) \equiv x(n) &= A\cos(\Omega nT + \phi) \\ &= A\cos(2\pi FnT + \phi) \\ &= A\cos(\frac{2\pi Fn}{F_s} + \phi) \\ &= A\cos(2\pi fn + \phi) \qquad (2.5.6) \end{aligned}$$

$$= A\cos(\omega n + \phi) \qquad (2.5.7)$$

Obsérvese en (2.6.6) que la nueva frecuencia digital f está definida como el cociente de la frecuencia de la señal analógica original F y la frecuencia de muestreo F_s, es decir, la frecuencia f se puede definir como la frecuencia F de la señal analógica relativa a la frecuencia de muestreo F_s, esto es:

$$f = \frac{F}{F_s} \qquad (2.5.8)$$

Para la función sinusoidal dada en (2.5.6), con $\phi = 0$ para facilitar el análisis del comportamiento de dicha función, se observa que al variar la frecuencia relativa f desde 0 a valores positivos, se obtienen diferentes valores (submúltiplos) del argumento $2\pi n$, con lo cual se generan sinusoidales muestreadas cuya tasa de oscilación va aumentando, como se muestra en la Figura 2.12 para cuatro valores de la frecuencia f: 0, 1/16, 1/8 y 1/2. Las gráficas se realizaron en MATLAB con el Programa 2.5.3 que se encuentra en el Apéndice A.

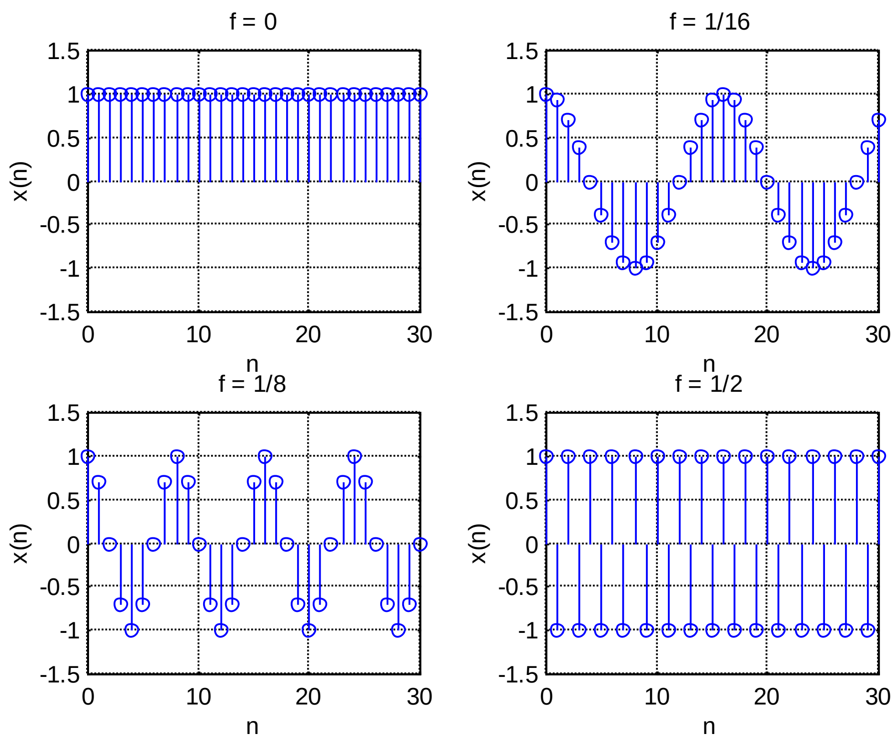


Figura 2.12 Efecto de la frecuencia en una señal sinusoidal de tiempo discreto $x(n) = \cos(2\pi f n)$ en el intervalo $0 \leq f \leq 1/2$

En la figura anterior se puede observar que para el valor de $f = 1/2$, se obtiene la máxima tasa de oscilación (frecuencia) de la señal muestreada con respecto a la frecuencia de muestreo F_s utilizada. Si se aumentara más la frecuencia F de la señal analógica original ($f > 1/2$), la frecuencia de la señal sinusoidal de tiempo discreto comenzará a disminuir hasta alcanzar el valor de cero cuando f = 1 (F = F_s). Si se sigue aumentando el valor de F ($F > F_s$ y f > 1), la frecuencia de la señal sinusoidal de tiempo discreto comenzará a aumentar nuevamente hasta llegar a su valor máximo cuando f = 3/2, obteniendo una señal sinusoidal discreta idéntica a la obtenida para f = 1/2.

Este comportamiento de las señales sinusoidales discretas se debe a la simetría y al comportamiento cíclico de las funciones sinusoidales (seno y coseno). Por lo tanto, debido al valor que toma el argumento de la función sinusoidal de tiempo discreto dada en (2.5.6 y 2.5.7), y por lo explicado anteriormente, su máxima tasa de oscilación se obtiene cuando la frecuencia ω de dicho argumento tiene el valor de $\pi + 2\pi k$ ($1/2 + k$ para f), con k = 0,1,2,3....Cuando k = 0 ($\omega = \pi$ y f = 1/2), se tiene la máxima frecuencia de la señal sinusoidal discreta, ya que para valores mayores de frecuencia se obtienen señales sinusoidales de tiempo discreto idénticas a las obtenidas en el intervalo de $0 \leq \omega \leq \pi$ ($0 \leq f \leq 1/2$). De manera similar sucede con las frecuencias negativas, por lo que el intervalo de frecuencias $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ($-1/2 \leq f \leq 1/2$) define el intervalo en el cual se obtienen señales sinusoidales discretas *únicas*. El intervalo anterior, llamado *rango fundamental*, también se puede expresar como: $0 \leq f \leq 1$ ó $0 \leq \omega \leq +2\pi$, debido a que en estos intervalos también se pueden manejar señales sinusoidales de tiempo discreto *únicas*.

En la Figura 2.13 se muestra la relación entre las dos formas de expresar la frecuencia f y ω para las señales sinusoidales de tiempo discreto.

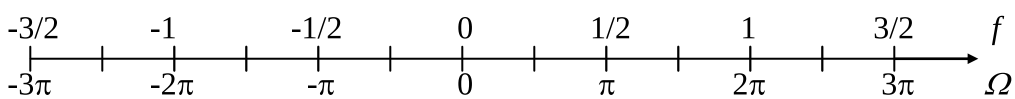
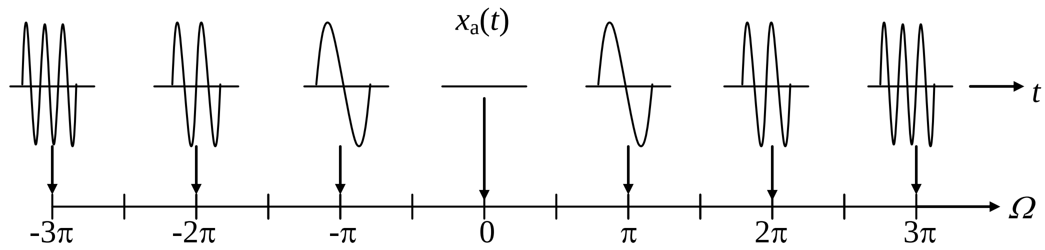
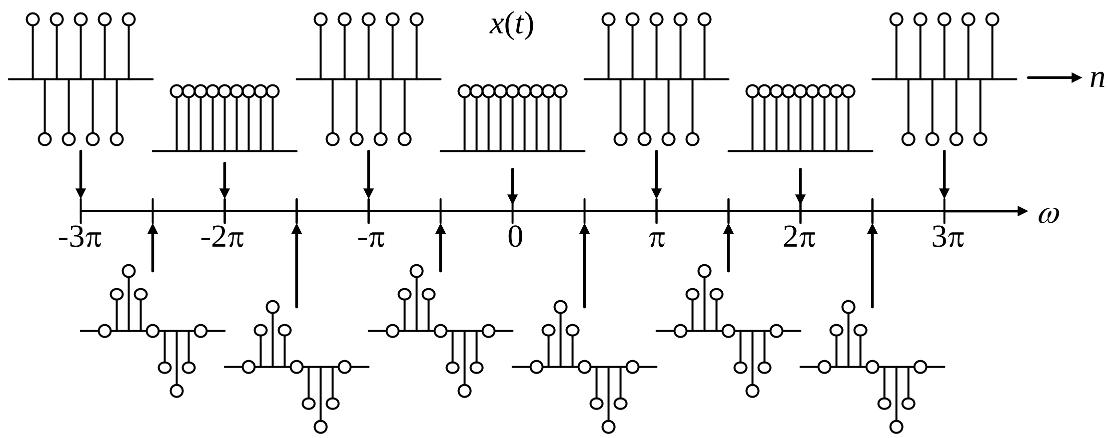


Figura 2.13 Relación entre las frecuencias f y ω.

Para las señales sinusoidales en tiempo continuo ($x_a(t) = A\cos(\Omega_0 t + \phi)$), conforme aumenta el valor de Ω_0, la oscilacióndne $x_a(t)$ va siendo cada vez mayor, a diferencia de las señales sinusoidales de tiempo discreto ($x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$), en las cuales, al aumentar el valor de ω_0 desde 0 a π, la oscilación de $x(n)$ irá aumentando, mientras que si ω_0 se incrementa desde π hasta 2π, la oscilación de $x(n)$ irá disminuyendo. Para esta misma señal discreta, si la frecuencia ω_0 se sigue incrementando desde 2π hasta 3π, la oscilación de $x(n)$ irá aumentando nuevamente, y el ciclo se repite indefinidamente. Por lo tanto, las frecuencias (ω) cercanas a $2\pi k$ (con k entero), serán frecuencias bajas, mientras que las frecuencias cercanas a $\pi + 2\pi k$ serán frecuencias altas, como puede observarse en la Figura 2.14.



(a) Señal sinusoidal de tiempo continuo: $x_a(t) = A\cos(\Omega_0 t + \phi)$



(b) Señal sinusoidal de tiempo discreto: $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$

Figura 2.14 Ejemplo gráfico del comportamiento de la frecuencia en señales sinusoidales de tiempo continuo (a) y de tiempo discreto (b).

2.6 Exponenciales complejas discretas

Las funciones exponenciales complejas discretas son fundamentales en el estudio de las señales y sistemas en tiempo discreto, ya que dichas funciones siempre representan *oscilaciones en el tiempo*, con una cierta amplitud y fase.

Las señales sinusoidales discretas que se estudiaron en las secciones anteriores, se pueden considerar como casos particulares de las señales exponenciales complejas discretas, ya que como se mencionó en la sección 2.2, las funciones exponenciales complejas discretas se pueden representar con sus dos componentes: real e imaginaria, siendo la parte real de dichas exponenciales a las que se les ha llamado señales sinusoidales de tiempo discreto.

Las propiedades de las señales discretas periódicas presentadas en la sección anterior, se aplican de la misma manera para las señales exponenciales complejas discretas. A continuación se presenta un resumen de las propiedades estudiadas en la sección anterior, aplicadas a las funciones exponenciales.

4. **Una señal exponencial compleja en tiempo discreto es periódica sólo si su frecuencia f es un número racional**.

   Por ejemplo, la siguiente función exponencial compleja discreta:

$$x(n) = e^{j2\pi f_0 n} \qquad (2.6.1)$$

   será periódica sólo si se cumple que $f_0 = k/N$ (con k y N enteros). Si $x(n)$ es periódica, entonces N representa el período de la señal y f_0 la frecuencia de ésta, como se expresa en la siguiente relación:

$$x(n) = e^{j2\pi f_0 n} = e^{j2\pi f_0 (n+N)} \qquad (2.6.2)$$

5. **Las señales exponenciales complejas discretas cuyas frecuencias estén separadas por un múltiplo entero de 2π, son idénticas.**

   Esta propiedad se muestra en la siguiente expresión:

$$e^{j(2\pi f_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi f_0 n} \qquad (2.6.3)$$

6. **Las exponenciales complejas discretas tendrán una frecuencia máxima cuando $\omega=\pi$ (o $\omega=-\pi$).**

La importancia de las funciones exponenciales complejas radica en el hecho de que mediante una combinación adecuada de éstas, se puede representar cualquier función en el tiempo continuo o discreto.

Así como una suma de las funciones impulso puede representar a cualquier secuencia discreta, una combinación lineal de las funciones exponenciales complejas discretas podrá representar a esa misma secuencia. Por ejemplo, la secuencia mostrada en la Figura 2.15, podrá representarse de dos maneras diferentes: como una suma ponderada de la función impulso (2.6.4), o como una combinación lineal de funciones exponenciales complejas discretas (2.6.5).

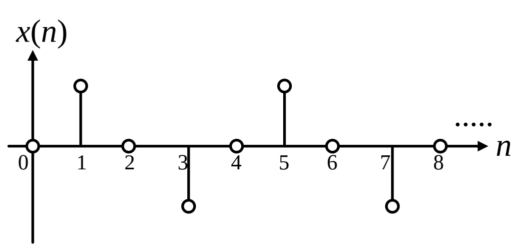


Figura 2.15 Secuencia periódica $x(n)$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\delta(n-k)=\begin{cases}1, & n=1+4k\\ -1, & n=3+4k\\ 0, & en \quad otro \quad caso\end{cases} \quad ; \quad k=0,1,2... \tag{2.6.4}$$

$$x(n)=\frac{j}{2}\left[e^{j3\pi n/2}-e^{j\pi n/2}\right] \tag{2.6.5}$$

En el ejemplo anterior, se observa que se trata de una señal periódica con período $N = 4$, por lo que la frecuencia de la señal $x(n)$ será $f_0 = ¼$ ($\omega_0 = \pi/2$), y la expresión (2.6.5) se puede re-escribir como:

$$x(n)=\frac{j}{2}\left[e^{j3\omega_0 n}-e^{j\omega_0 n}\right] \tag{2.6.6}$$

en donde se observa claramente que la señal $x(n)$ se puede representar como la combinación lineal de dos exponenciales complejas discretas de frecuencias ω_0 y $3\omega_0$, también llamadas componentes espectrales de frecuencia ω_0 y $3\omega_0$. La expresión anterior, corresponde a la representación en *Series de Fourier* de señales periódicas (*Transformada de Fourier* para señales no periódicas), tema que se estudiará en capítulos posteriores.

Es importante mencionar que las señales discretas siempre se representarán mediante la combinación lineal de funciones exponenciales complejas *relacionadas armónicamente*, es decir, las funciones exponenciales que aparezcan en la representación de la señal, siempre tendrán una frecuencia que será un *múltiplo entero* de la frecuencia fundamental de la señal.

2.7 Clasificación de señales en tiempo discreto

La señales en tiempo discreto se pueden clasificar de acuerdo a diferentes criterios. A continuación se presentan las clasificaciones más empleadas en estos apuntes.

1. **Señales de Energía y de Potencia**

Cuando una señal de volaje en tiempo continuo $x(t)$ se aplica a un resistor de 1 Ω, la *energía* total disipada en ella será:

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\ dt \tag{2.7.1}$$

Para el caso de señales en tiempo discreto, la *energía* de una señal $x(n)$ se define como:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{2.7.2}$$

donde $x(n)$ es una señal compleja. Si $x(n)$ es una señal real, entonces la expresión dada en (2.8.2), se modifica a:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) \tag{2.7.3}$$

En las expresiones anteriores, la energía de una señal puede ser finita o infinita. En el caso de que la energía de la señal sea finita ($0 < E_x < \infty$), se dice que la señal $x(n)$ es una *señal de energía*.

La potencia promedio se define como la razón a la que se disipa la energía. Para las señales en tiempo continuo, ésta se define como:

$$P_x = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-t}^{t} |x(t)|^2 dt \tag{2.7.4}$$

donde la cantidad $2L$ es la longitud de un segmento de la señal $x(t)$ en segundos.

Para las señales en tiempo discreto, la potencia promedio se define como:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \tag{2.7.5}$$

donde $2N + 1$ es el número de muestras sobre las que se hace el promedio, y $x(n)$ es una señal discreta compleja. Si $x(n)$ es una señal real, entonces la expresión anterior se modifica a:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2(n) \tag{2.7.6}$$

Nuevamente, cuando el valor de la potencia promedio para una señal discreta $x(n)$ es finito (distinto de cero), a la señal se le llama *señal de potencia*.

Ejemplo 2.7.1

Calcular la potencia promedio P_x para la siguiente secuencia:

$x(n) = A\sin(n\omega_0+\phi)$, para $\forall\ n$.

Solución.

Como la secuencia $x(n)$ es real, entonces se sustituye directamente en (2.7.6):

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} A^2 \sin^2(\omega_0 n + \phi)$$

Aplicando la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

en la cual, para el caso en el que $\alpha = \beta$, resulta la siguiente expresión:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

Por lo tanto, aplicando esta última igualdad al argumento de la sumatoria, queda:

$$P_x = \frac{A^2}{2} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} (1) - \frac{A^2}{2} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \cos(2\omega_0 n + \phi)$$

Desarrollando resulta:

$$P_x = \frac{A^2}{2} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \right) (2N+1) - \frac{A^2}{2}(0)$$

Finalmente:

$$P_x = \frac{A^2}{2}$$

Como la potencia es finita, se trata de una *señal de potencia*.

2. Señales periódicas y aperiódicas

Una señal periódica es aquella que cumple con la siguiente expresión:

$$x(n+N) = x(n) \quad \text{para todo } n \qquad (2.7.7)$$

donde el valor mas pequeño de N para el cual se verifica (2.7.7), se le llama *período fundamental*. Cuando no existe algún valor de N para el cual se cumpla la expresión anterior, se dice que la señal es aperiódica.

3. Señales pares e impares

Una señal par es aquella que cumple con:

$$x(n) = x(-n) \qquad (2.7.8)$$

Una señal impar es aquella que cumple con:

$$x(n) = -x(-n) \qquad (2.7.9)$$

En la Figura 2.16 se muestran gráficamente una señal $x(n)$ par (a) y una señal $y(n)$ impar (b).

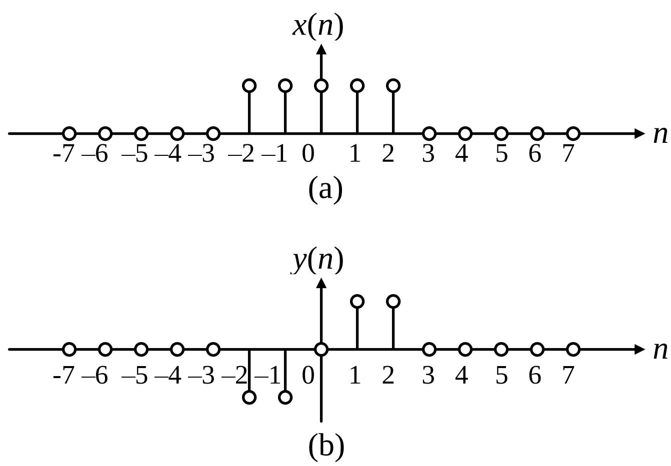


Figura 2.16 Ejemplo de señales: (a) par y (b) impar