3 Sistemas en tiempo discreto

Dentro de los distintos tipos de sistemas discretos, solo se estudiarán los sistemas cuyo comportamiento es lineal e invariante en el tiempo. En este capítulo se presenta la definición de los sistemas discretos en general. También se definen los bloques básicos usados en la representación de los mismos y se hace una clasificación de dichos sistemas. Finalmente se presenta una introducción a los métodos de análisis mas usados para los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.

3.1 Definición de sistemas discretos

Un sistema discreto se puede definir como un dispositivo o algoritmo que realiza operaciones (procesamiento) sobre señales discretas. De manera mas detallada, un sistema discreto procesa una secuencia de entrada (excitación) y genera una secuencia de salida (respuesta del sistema), como se muestra en la Figura 3.1.

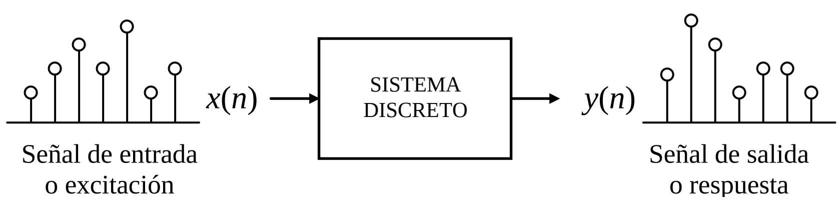


Figura 3.1 Representación de un Sistema Discreto

Un sistema discreto realiza un transformación sobre la señal de entrada $x(n)$, generando como resultado la señal de salida $y(n)$, lo cual se puede denotar de la siguiente manera:

$$y(n) \equiv T\{x(n)\} \tag{3.1.1}$$

donde T denota la transformación (también llamada operador).

3.2 Representación de sistemas discretos mediante diagramas a bloques

Como se mencionó anteriormente, un sistema discreto opera sobre señales discretas. Los operadores básicos de los sistemas discretos se presentan a continuación.

1. Sumador

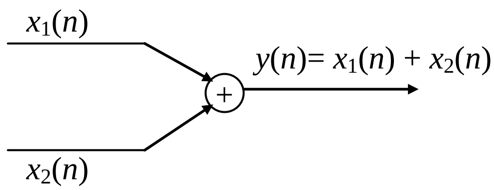


Figura 3.2 Representación gráfica de un *sumador*.

La suma de dos señales discretas no requiere almacenar a ninguna de las dos señales, por lo que se le considera como una operación sin memoria.

2. Multiplicador por una constante

Figura 3.3 Representación gráfica de un *multiplicador por una constante.*

De la misma forma que el sumador, el *multiplicador por una constante* es una operación sin memoria.

3. Multiplicador de señales

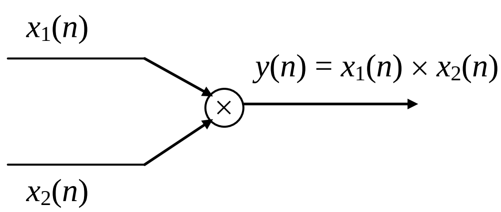


Figura 3.4 Representación gráfica de un *multiplicador de señales*.

Como no se requiere almacenar ninguna de las señales, el *multiplicador de señales* también es una operación sin memoria.

4. Retardador de un elemento

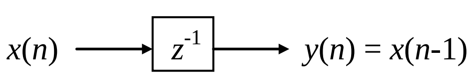


Figura 3.5 Representación gráfica de un *retardador de un elemento*.

El *retardador de un elemento* es un operador que almacena en memoria la muestra $x(n\text{-}1)$ en el instante n-1 y lo extrae de la memoria en el instante n. Por lo tanto, el *retardador de un elemento* es una operación con memoria.

5. **Adelantador de un elemento**

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z} \longrightarrow y(n)=x(n+1)$$

Figura 3.6 Representación gráfica de un *adelantador de un elemento*.

El *adelantador de un elemento* es un operador que no puede operar en tiempo real, debido a que es imposible conocer la muestra futura $x(n+1)$ en el instante n. Solamente cuando se tienen almacenadas previamente la muestras de la señal de entrada, entonces si será posible, en una aplicación con estas características, adelantar la señal $x(n)$ en el tiempo.

3.3 Clasificación de sistemas discretos

Los sistemas discretos, al igual que las señales discretas, se pueden clasificar de acuerdo a diferentes criterios. A continuación se presenta una clasificación que será la mas empleada en estos apuntes.

1. **Sistemas sin memoria**

En un sistema sin memoria, para todos los valores de n, la salida $y(n)$ depende solamente de la entrada para el mismo valor de n. A continuación se dan algunos ejemplos de señales discretas sin memoria.

$y(n) = 2x(n)$
$y(n) = |x(n)|$
$y(n) = [x(n)]^2$

2. **Sistema Lineales**

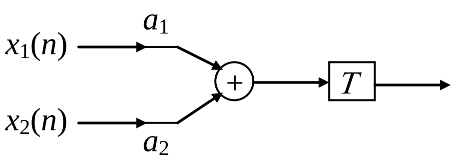
Estos sistemas son los que cumplen el principio de superposición. Si $y_1(n)$ y $y_2(n)$ son las respuestas de un sistema correspondientes a las entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ respectivamente, entonces el sistema es lineal si y solo si:

$$T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = a\,T\{x_1(n)\} + b\,T\{x_2(n)\} \qquad (3.3.1)$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

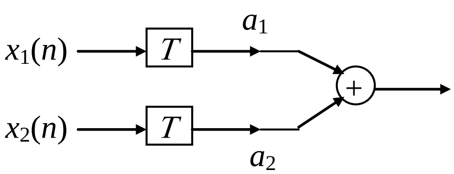
Prueba:

Como primer paso se aplica la transformación T a la suma de las entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$:



$$y(n) = T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} \qquad (3.3.2)$$

Como segundo paso, se aplica la transformación T a cada una de las entradas, sumando posteriormente dichas transformaciones:



$$y'(n) = a_1\,T\{x_1(n)\} + a_2\,T\{x_2(n)\} \qquad (3.3.3)$$

Finalmente se concluye que si $y(n) = y'(n)$ el sistema es lineal.

Ejemplo 3.3.1

Determine si los sistemas descritos por las siguientes relaciones de entrada-salida son o no lineales:

(a) $y(n) = nx(n)$
(b) $y(n) = x^2(n)$

Solución.

(a) El sistema definido por $y(n) = nx(n)$, se prueba para dos secuencias distintas de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$, resultando lo siguiente:

$y_1(n) = nx_1(n)$
$y_2(n) = nx_2(n)$

Como la transformación T, para este ejemplo, consiste en multiplicar por n la secuencia de entrada, se aplicará el teorema de linealidad de sistemas discretos para dos casos:

1. Aplicando la transformación T a la *suma* de las secuencias de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$, queda:

$$y_3(n) = T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

Obsérvese que se han incluido las constantes a_1 y a_2 para realizar la prueba de manera mas general y para aplicar exactamente el enunciado del teorema de linealidad de sistemas discretos.

2. Sumando las secuencias de salida $y_1(n)$ y $y_2(n)$, resulta:

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\} = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

Nuevamente se hace notar la inclusión de las constantes a_1 y a_2.

Como puede observarse, las expresiones finales obtenidas en ambos casos son iguales, por lo que resulta lo mismo aplicar la transformación a la suma de las secuencias de entrada que sumar las secuencias de salida correspondientes a cada una de las entradas de prueba. Por lo tanto *el sistema es lineal*.

(b) Para el sistema definido por $y(n) = x^2(n)$, se realiza la misma prueba anterior, escogiendo dos secuencias distintas de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$, resultando lo siguiente:

$y_1(n) = x_1^2(n)$
$y_2(n) = x_2^2(n)$

Para este ejemplo, la transformación T consiste en elevar al cuadrado la secuencia de entrada. Nuevamente, el teorema de linealidad se aplicará al sistema discreto para dos casos:

1. Aplicando la transformación T a la *suma* de las secuencias de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$, queda:

$$y_3(n) = T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2 = a_1^2x_1^2(n)+2(a_1a_2x_1(n)x_2(n))+a_2^2x_2^2(n)$$

2. Sumando las secuencias de salida $y_1(n)$ y $y_2(n)$, resulta:

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\} = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n)$$

Al observar las expresiones finales se concluye que *el sistema es no lineal*, debido a que dichas expresiones son distintas en cada caso.

3. Sistemas invariantes en el tiempo.

Los sistemas invariantes en el tiempo se caracterizan porque sus características de entrada-salida, es decir, su transformación T, no cambia con el tiempo.

Un sistema en reposo T es invariante en el tiempo o invariante a desplazamientos, si y solo si:

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n) \tag{3.3.4}$$

implica que:

$$x(n\text{-}k) \xrightarrow{T} y(n\text{-}k) \tag{3.3.5}$$

para toda señal de entrada $x(n)$ y todo desplazamiento temporal k.

Ejemplo 3.3.2

Determine si los sistemas descritos por las siguientes relaciones de entrada-salida son invariantes en el tiempo.

(a) $y(n) = x(n\text{-}n_d)$
(b) $y(n) = nx(n)$

Solución.

Para determinar si cada uno de los sistemas son invariantes en el tiempo, se debe realizar la siguiente prueba: primero se desplaza la secuencia de entrada un tiempo k entero $[x(n\text{-}k)]$ y se calcula la salida del sistema a través de la transformación T que lo define; después se desplaza la secuencia de salida el mismo tiempo k $[y(n\text{-}k)]$, y se comparan ambos resultados.

(a) Para el sistema $y(n) = x(n\text{-}n_d)$, la transformación T consiste en desplazar la entrada un tiempo n_d.

1. Aplicando la transformación T a la secuencia de entrada desplazada un tiempo arbitrario $x(n\text{-}n_0)$, queda:

$$y(n) = T\{x(n\text{-}n_0)\} = x(n\text{-}n_d\text{-}n_0)$$

2. Desplazando únicamente la secuencia de salida $y(n)$ por un tiempo n_0 resulta:

$$y(n\text{-}n_0) = T\{x(n\text{-}n_0)\} = x(n\text{-}n_d\text{-}n_0)$$

Obsérvese que el desplazar la secuencia de salida un tiempo n_0, consiste en sustituir el argumento de la secuencia de salida $y(n)$ por $y(n\text{-}n_0)$ en toda la expresión original donde aparezca el argumento n.

Por lo tanto *el sistema es invariante en el tiempo*, porque las expresiones finales en cada caso son iguales.

(b) En el sistema $y(n) = nx(n)$, la transformación T consiste en multiplicar por n la secuencia de entrada

1. Aplicando la transformación T a la secuencia de entrada desplazada un tiempo arbitrario $x(n\text{-}k)$, queda:

$$y(n) = T\{x(n\text{-}k)\} = nx(n\text{-}k)$$

2. Desplazando únicamente la secuencia de salida $y(n)$ por un tiempo k resulta:

$$y(n\text{-}k) = T\{x(n\text{-}k)\} = (n\text{-}k)x(n\text{-}k)$$

Nuevamente se hace notar que el desplazar la secuencia de salida un tiempo k, consiste en sustituir el argumento de la secuencia de salida $y(n)$ por $y(n-k)$ en toda la expresión original donde aparezca el argumento n.

De los resultados obtenidos se concluye que *el sistema no es invariante en el tiempo*, porque las expresiones finales en cada caso son diferentes.

4. Sistemas causales

Los sistemas causales son aquellos en los cuales la secuencia de salida $y(n)$ en cualquier instante n, depende sólo de las entradas presentes y pasadas ($x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$, ...), es decir:

$$y(n) = F(x(n), x(n-1), x(n-2), ...) \qquad (3.3.6)$$

Los sistemas sin memoria son considerados como sistema causales.

Ejemplo 3.3.3

Los sistemas definidos por:

(a) $y(n) = x(n-10)$, para $\forall n$
(b) $y(n) = x(n) - x(n-1)$, para $\forall n$

son sistemas causales.

Los sistemas definidos por:

(c) $y(n) = x(n+10)$, para $\forall n$
(d) $y(n) = x(n/2)$, para $\forall n$

no son sistemas causales.

5. Sistemas estables

Un sistema es estable en el sentido *entrada-acotada salida-acotada* (*BIBO*), si y solo si toda entrada acotada produce una secuencia de salida acotada, es decir, existe un par de números finitos M_y y M_x tales que:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \quad \text{y} \quad |y(n)| \leq M_y < \infty \qquad \text{para } \forall n \qquad (3.3.7)$$

Ejemplo 3.3.4

Mostrar que el sistema dado a continuación es estable:

$y(n) = e^{x(n)}$ para $\forall n$

Solución.

Para mostrar que el sistema es estable, se le aplica una entrada acotada $|x(n)| \le M$, donde M es un valor fijo positivo. Entonces se evalúa la salida del sistema $y(n)$ para esta entrada y resulta lo siguiente:

$$|y(n)| = |e^{x(n)}| \le e^{|x(n)|} \le e^{M}$$

Por lo tanto, e^M tiene un valor positivo finito, y como consecuencia *el sistema es estable*, ya que su salida también está acotada.

6. Sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI)

Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) tienen como propiedad el hecho de que su respuesta $y(n)$ a una entrada impulso unitario $x(n) = \delta(n)$, representa el comportamiento o caracterización del sistema mismo, de tal manera que, conociendo dicha respuesta, es posible calcular la salida $y(n)$ del sistema para cualquier entrada $x(n)$ que se le aplique.

A la respuesta del sistema $y(n)$ al impulso unitario, por convención se le conoce como $h(n)$, es decir, la función $h(n)$ es igual a la salida del sistema $y(n)$ únicamente cuando la entrada al sistema $x(n)$ es la función impulso unitario, como se indica en la siguiente expresión:

$$h(n) = y(n) \text{ únicamente cuando } x(n) = \delta(n) \qquad (3.3.8)$$

La importancia de (3.3.8) está, como ya se mencionó, en que la respuesta $y(n)$ del sistema a cualquier entrada $x(n)$, se puede calcular a través de la función $h(n)$, mediante lo que se conoce como una *suma de convolución*, la cual se define mediante la siguiente relación:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \qquad (3.3.9)$$

La *suma de convolución* mostrada en la expresión anterior, se representa mediante el símbolo ($*$), como se muestra en la expresión (3.3.10), en donde, además, se puede observar que la operación de *convolución* es conmutativa.

$$y(n) = h(n) * x(n) = x(n) * h(n) \qquad (3.3.10)$$

7. **Sistemas recursivos y no-recursivos**

Los sistemas cuya salida $y(n)$ depende exclusivamente de su(s) entrada(s) $x(n)$ (entrada presente y/o pasada(s)), como se muestra en la expresión (3.3.11) y en la Figura 3.7, se les conoce como *sistemas no-recursivos*.

$$y(n)=F[x(n), x(n-1),..., x(n-M)] \tag{3.3.11}$$

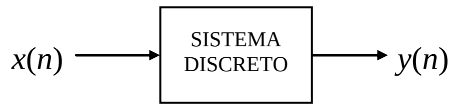


Figura 3.7 Sistema *no-recursivo*

Los sistemas cuya salida $y(n)$ depende tanto de su(s) entrada(s) $x(n)$ (presente y/o pasada(s)) y de su(s) salida(s) pasada(s), como se indica en la expresión (3.3.12) y en la Figura 3.8, se les llama *sistemas recursivos*.

$$y(n)=F[y(n-1), y(n-2),..., y(n-N), x(n), x(n-1),..., x(n-M)] \tag{3.3.12}$$

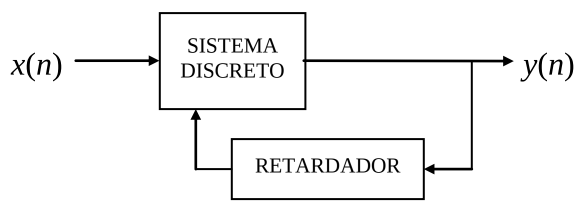


Figura 3.8 Sistema *recursivo*

Se puede observar de las Figuras 3.7 y 3.8, que la diferencia principal entre los sistemas recursivos y no-recursivos está en que, en los primeros, existe un lazo de retroalimentación de la salida hacia el sistema discreto, formado por un retardador de la salida, mientras que en los sistemas no-recursivos no existe dicho lazo de retroalimentación.

3.4 Métodos de análisis de los sistemas LTI

Cuando un sistema discreto es lineal y al mismo tiempo invariante en el tiempo, existen propiedades y técnicas muy importantes que permiten caracterizar y analizar completamente a dichos sistemas.

Figura 3.9 Representación gráfica de la relación entrada-salida para un sistema LTI

Los métodos para analizar el comportamiento de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), es decir, los métodos para obtener la respuesta de un sistema LTI a una determinada señal de entrada son básicamente dos.

1. Convolución de la señal de entrada con la respuesta impulsional del sistema

Este método de análisis de los sistema LTI, consiste en descomponer la señal de entrada $x(n)$ en una suma de impulsos, obtener la respuesta del sistema LTI a cada uno de los impulsos y, finalmente, obtener la señal de salida $y(n)$ superponiendo, en el tiempo, las respuestas obtenidas a cada uno de los impulsos de entrada. Este método de análisis, que aparentemente tiene tres fases, realmente se realiza en una sola operación matemática llamada *convolución*, la cual se explica detalladamente en el siguiente capítulo.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{3.4.1}$$

En la expresión anterior se observa que a través de la sumatoria del producto de la función $h(n)$ y la señal de entrada $x(n)$ (reflejada y desplazada), se puede calcular la salida del sistema $y(n)$ para toda n. El comportamiento de la función $h(n)$ sería análogo, en cierta forma, al de la *función de transferencia* de los sistemas de tiempo continuo, en los cuales es posible calcular, a través de dicha función, la salida del sistema para cualquier entrada que se le aplique.

La expresión (3.4.1) representa también la relación entrada-salida de los sistemas LTI, y se puede escribir como se indica a continuación:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{3.4.2}$$

es decir, es indistinto considerar a la entrada como $x(n)$ y la caracterización del sistema como $h(n)$, o la entrada como $h(n)$ y la caracterización del sistema como $x(n)$, como se muestra en la Figura 3.10.

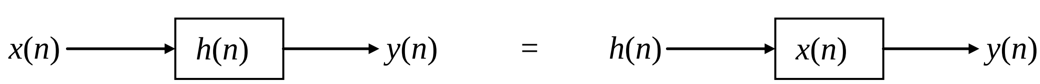


Figura 3.10 Representación a bloques de la expresión (3.4.2)

2. Solución de la ecuación en diferencias que define al sistema

Este método consiste en obtener la solución de la ecuación de entrada-salida del sistema que, de manera general, tendrá la siguiente forma:

$$y(n)=F[y(n\text{-}1), y(n\text{-}2),..., y(n\text{-}N), x(n), x(n\text{-}1),..., x(n\text{-}M)] \qquad (3.4.3)$$

donde "*F*" representa una función definida sobre los argumentos que, en este caso, son las salidas anteriores a $y(n)$ y las entradas presentes y pasadas. Otra forma de escribir esta función, y que constituye la representación general de la relación entrada-salida para los sistemas LTI, es la que se presenta a continuación y se le denomina *ecuación en diferencias*:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (3.4.4)$$

donde a_k y b_k son constantes que definen el comportamiento del sistema. El método de solución de esta ecuación en diferencias se presenta en el capítulo 5.

Es importante mencionar que la respuesta impulsional $h(n)$ de los sistemas LTI, constituye un caso particular de la solución de la ecuación en diferencias (3.4.4) que los define, es decir, dicha respuesta impulsional $h(n)$ es la respuesta $y(n)$ de estado cero del sistema, cuando la entrada es $x(n) = \delta(n)$ y el sistema está inicialmente en reposo.