

## 4 Respuesta al impulso de los sistemas LTI

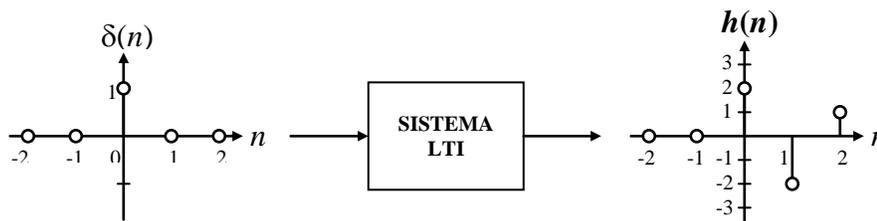
La respuesta de los sistemas *Lineales e Invariantes en el Tiempo* (LTI) a una entrada impulso unitario (*respuesta impulsional*), constituye el tema central desarrollado en este capítulo.

La convolución es una operación matemática que se realiza entre dos funciones, la cual permite, en el caso de los sistemas discretos LTI, obtener la respuesta de éstos a cualquier señal de entrada, mediante la convolución de dicha señal de entrada y la *respuesta impulsional* del sistema. Se describe detalladamente el mecanismo, significado y utilidad de la convolución entre dicha *respuesta impulsional* y la señal de entrada en los sistemas LTI.

Finalmente se presentan las propiedades de los sistemas LTI basadas en el comportamiento de su respuesta al impulso, así como los dos grandes grupos en los que se clasifican los sistemas LTI: los sistemas *FIR* y los sistemas *IIR*.

### 4.1 La convolución como método para obtener la respuesta de un sistema LTI a una determinada señal de entrada.

Una de las técnicas empleadas para caracterizar los sistemas discretos, consiste en obtener la respuesta del sistema a una entrada impulso unitario. Por convención se emplea la notación  $h(n)$  para representar la respuesta de un sistema a una entrada impulso unitario. Esta señal de prueba resulta muy importante en el estudio de los sistemas discretos, debido a que la respuesta del sistema a esta entrada, genera todos los parámetros necesarios para especificar completamente a dicho sistema. Por ejemplo, suponiendo que la respuesta al impulso unitario del sistema LTI representado en la Figura 4.1, es la que se muestra en la misma, entonces a dicha respuesta se le conoce como la *respuesta al impulso unitario*, o *respuesta impulsional*  $h(n)$  del sistema.

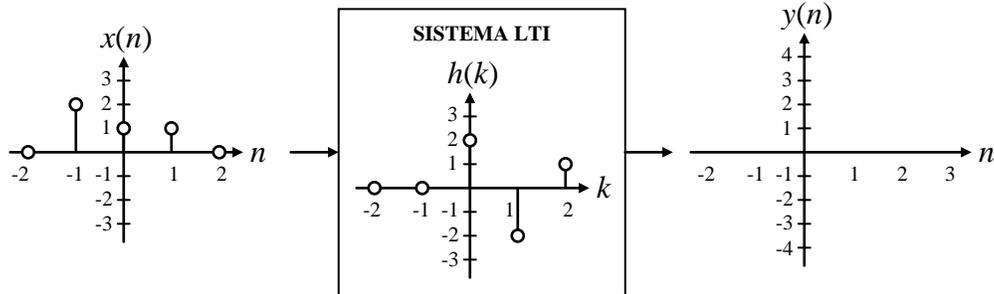


**Figura 4.1** Respuesta  $h(n)$  del sistema LTI a la entrada impulso unitario  $\delta(n)$

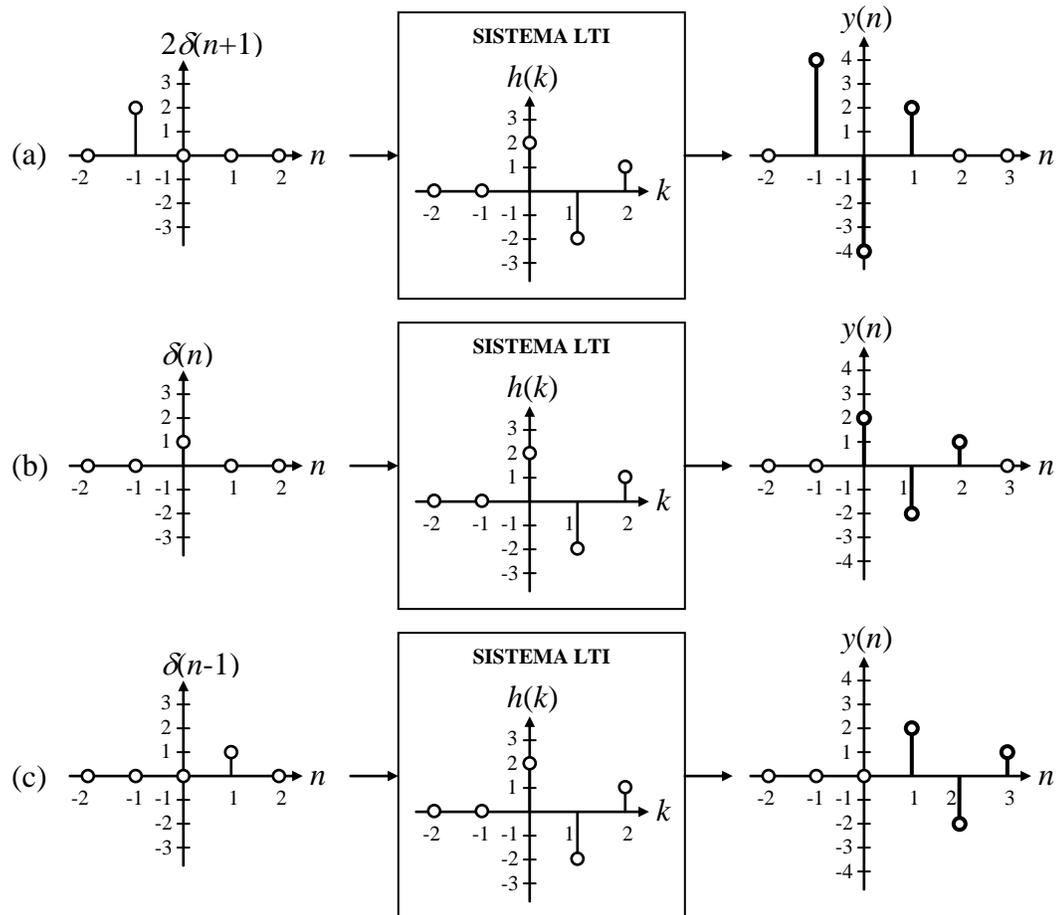
Ahora, para conocer la respuesta de este sistema a una determinada entrada  $x(n)$ , como la mostrada en la Figura 4.2, se puede descomponer dicha entrada  $x(n)$  en una suma

de impulsos, como se indica en la expresión (4.1.1), y obtener la respuesta a cada impulso de forma independiente como se muestra en la Figura 4.3.

$$x(n] = 2\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) \quad (4.1.1)$$

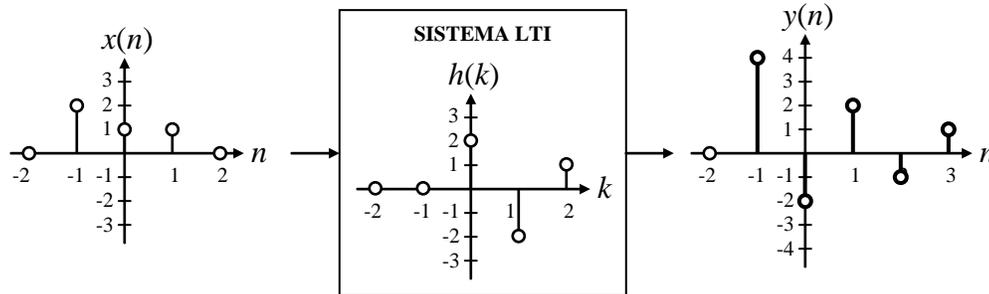


**Figura 4.2** Obtención de la respuesta  $y(n]$  del sistema LTI a la entrada  $x(n]$



**Figura 4.3** Respuesta del sistema LTI a cada impulso, de manera independiente, de la señal de entrada  $x(n]$ . Respuesta para (a)  $n = -1$ , (b)  $n = 0$  y (c)  $n = 1$

Por lo tanto, la respuesta total del sistema a la entrada  $x(n)$  será la suma de los impulsos resultantes de  $y(n)$  a cada uno de los impulsos de entrada, como se muestra en la Figura 4.4.



**Figura 4.4** Respuesta total del sistema LTI a la señal de entrada  $x(n)$ .

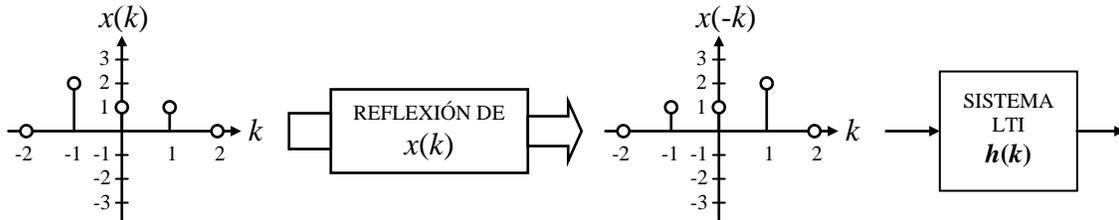
Es importante observar el procedimiento empleado para obtener la respuesta del sistema LTI al aplicarle la señal de entrada  $x(n)$ . Obsérvese, en la secuencia gráfica de la Figura 4.3a, que el primer paso consistió en obtener la respuesta del sistema para el primer valor que se presenta en la entrada  $x(n)$ , lo cual sucede para  $n = -1$  en este ejemplo. Esta respuesta consiste en escalar la respuesta del sistema al impulso unitario  $h(n)$  de acuerdo a la amplitud de este primer impulso de la entrada, es decir, la respuesta al impulso unitario del sistema  $h(n)$  queda multiplicada por un factor de 2, como puede observarse en dicha figura. Además, obsérvese que esta respuesta del sistema al primer impulso de la secuencia de entrada, comienza también en el tiempo  $n = -1$ .

En la Figura 4.3b, se hace lo mismo con el segundo impulso de la entrada  $x(n)$ , el cual sucede en el tiempo  $n = 0$ . Como en este caso la amplitud del impulso de entrada es de 1, la respuesta del sistema  $h(n)$  queda como la original, sin escalar. En la Figura 4.3c, se repite el mismo procedimiento con el tercer impulso de la entrada  $x(n)$  en el tiempo  $n = 1$ .

Si se analiza con mayor detalle este procedimiento para obtener la respuesta del sistema LTI, se puede ver que el primer impulso de la entrada  $x(n)$  en “afectar” al sistema a través de su *respuesta impulsional*  $h(n)$ , es el que sucede en el tiempo  $n = -1$  (para el ejemplo propuesto), después se presenta el impulso de entrada que sucede en el tiempo  $n = 0$ , pero debe observarse que los efectos producidos sobre el sistema por el impulso de entrada que sucedió en  $n = -1$  todavía están presentes en el tiempo  $n = 0$ . Finalmente se presenta el impulso de entrada en el tiempo  $n = 1$ , y como en el caso anterior, los efectos producidos sobre el sistema por los impulsos de las entradas que se aplicaron en  $n = -1$  y  $n = 0$ , aún están presentes en este momento de  $n = 1$ . Cada uno de los impulsos de entrada afectarán al sistema a través de su *respuesta al impulso unitario*  $h(n)$ , y los impulsos resultantes de cada uno de ellos se suman en cada uno de los tiempos  $n$  para obtener la salida total del sistema  $y(n)$ , como se muestra en la Figura 4.4.

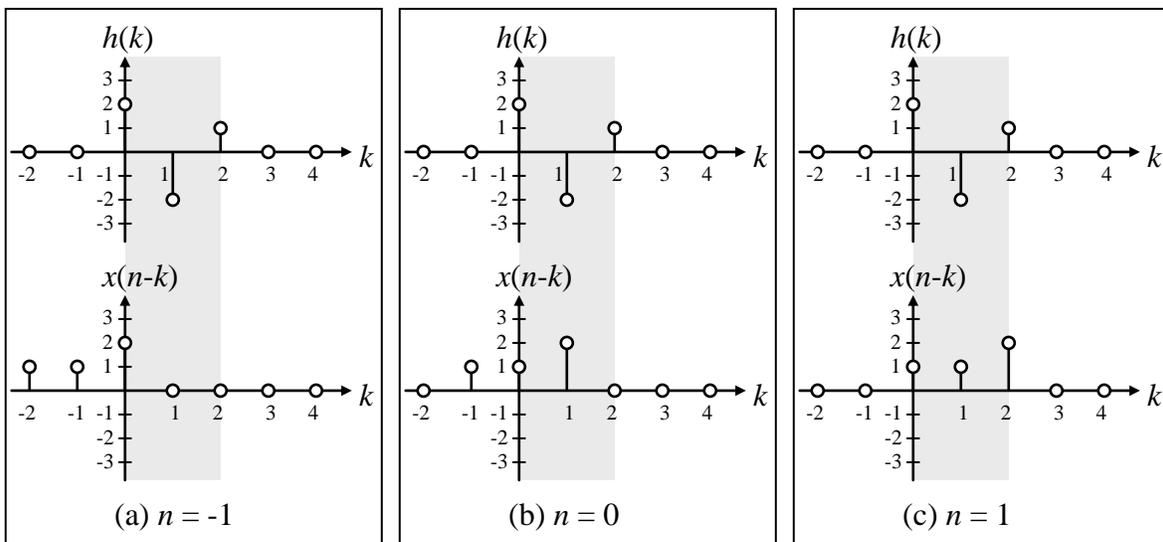
Matemáticamente se puede desarrollar un método para obtener la respuesta de cualquier sistema LTI basado en el procedimiento descrito anteriormente. Este método consiste en:

1. Reflejar en el tiempo, respecto al eje  $k = 0$  (la letra de la variable independiente  $n$  se cambia ahora por  $k$ , donde  $k$  será una variable auxiliar diferente de  $n$ ), la secuencia de entrada  $x(k)$ . Al reflejar en el tiempo la entrada  $x(k)$  lo que se hace es, en este método propuesto, presentar al sistema  $h(k)$  cada uno de los impulsos de la señal de entrada en el orden temporal  $n$  en el que suceden, es decir, los impulsos se irán aplicando al sistema en un orden tal y como se presentan en el tiempo  $n$ , como se muestra en la Figura 4.5.



**Figura 4.5** Reflexión de la señal de entrada  $x(k)$  respecto al eje  $k = 0$ .

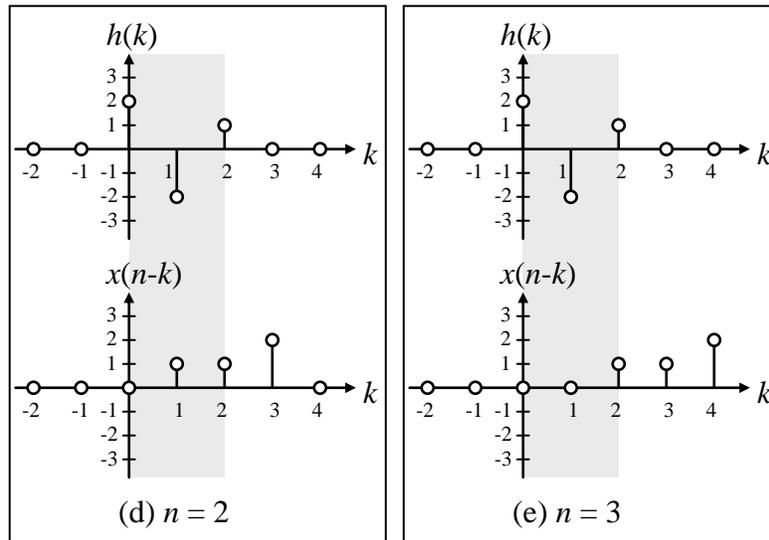
2. Desplazar  $x(-k)$  en el tiempo hacia la derecha una cantidad  $n$  (con  $n$  positivo) o a la izquierda la misma cantidad  $n$  (con  $n$  negativo), de tal manera que los impulsos de la señal de entrada se puedan procesar (multiplicar con  $h(k)$ ), en el mismo momento temporal  $n$  en el que suceden tanto la señal de entrada  $x(k)$  como la respuesta al impulso unitario del sistema  $h(k)$ , es decir, para que las señales se puedan multiplicar se deben traslapar ambas funciones  $x(n-k)$  y  $h(k)$  en el mismo tiempo  $n$ , tal como se muestra en las Figuras 4.6A y 4.6B.



**Figura 4.6A** Secuencia de desplazamiento de la señal de entrada  $x(k)$  para diferentes momentos de tiempo desde  $n = -1$  hasta  $n = 1$ .

En la parte superior de las Figuras 4.6A y 4.6B se encuentra representada la respuesta del sistema al impulso unitario  $h(k)$  como referencia para cada uno de los desplazamientos de la entrada  $x(n-k)$  en diferentes momentos de tiempo (desde  $n = -1$  hasta  $n = 3$ ). Obsérvese que en los desplazamientos de la señal de entrada

$x(n-k)$  que corresponderían a  $n \leq -2$  y  $n \geq 4$ , las funciones  $h(k)$  y  $x(n-k)$  no se traslapan en ningún momento del tiempo auxiliar  $k$ , por lo que el producto de ambas



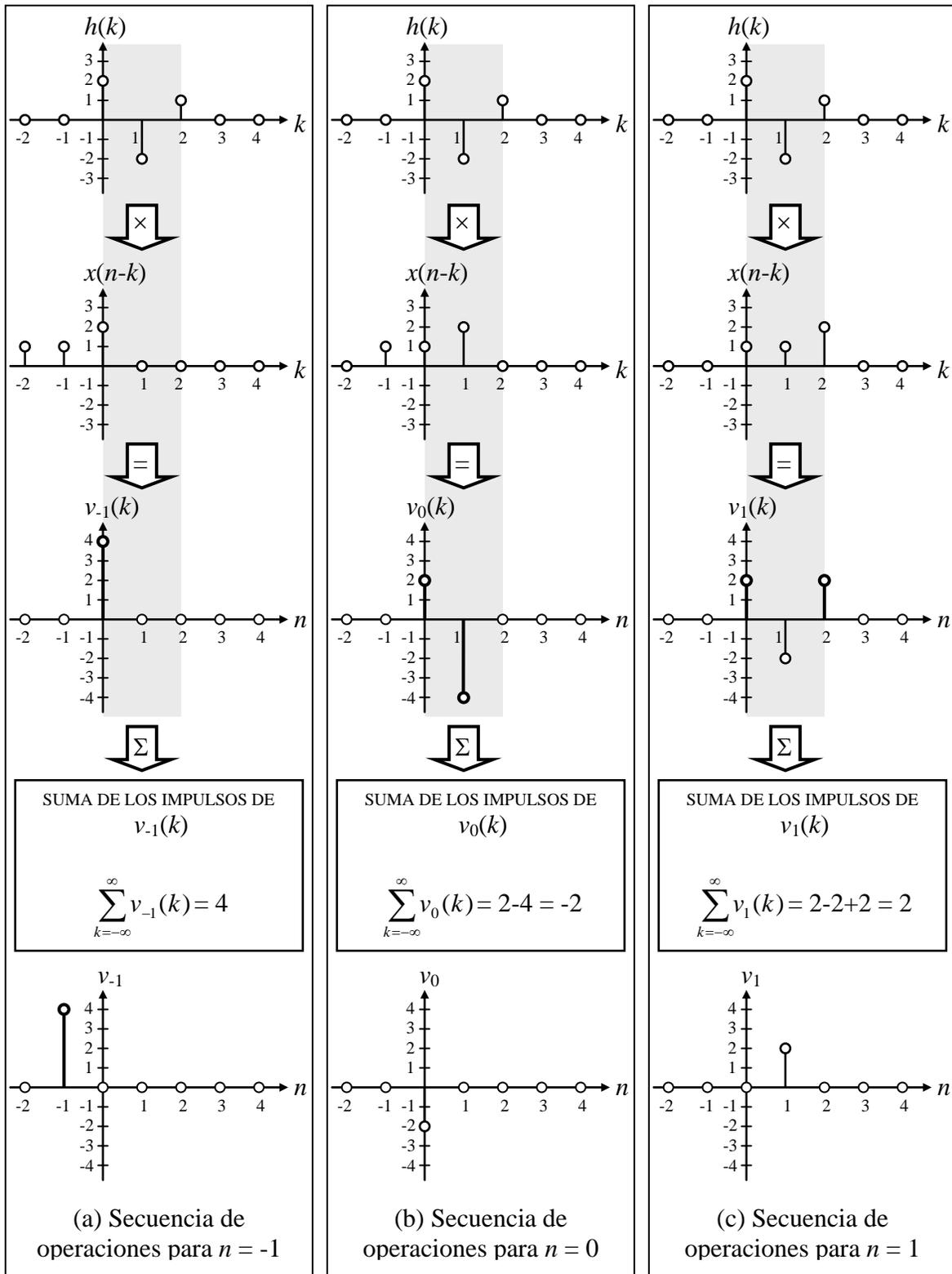
**Figura 4.6B** Secuencia de desplazamiento de la señal de entrada  $x(k)$  para diferentes momentos de tiempo desde  $n = 2$  hasta  $n = 3$ .

funciones en el tiempo  $n$  sería cero para cualquier valor de  $k$ . Es por esta razón por lo que no aparecen representados mas desplazamientos de la señal de entrada que los mostrados en dichas figuras.

3. Multiplicar  $h(k)$  por  $x(n-k)$  para obtener la secuencia producto  $v_n(k) = h(k)x(n-k)$ . Nuevamente, en las Figura 4.7A y 4.7B, se muestran en forma gráfica dichas secuencias producto para  $n = -1$  hasta  $n = 3$ .
4. Sumar todos los impulsos presentes en el tiempo  $n$ , lo que equivale a sumar todos los impulsos de la secuencia generada en  $v_n(k)$  para cada  $n$ , como se muestra en las mismas Figuras 4.7A y 4.7B.

En las Figuras 4.7A y 4.7B puede observarse que al ir desplazando la secuencia  $x(n-k)$  para diferentes valores de  $n$ , al realizar el producto de esta función con  $h(k)$ , los efectos de cada uno de los impulsos de la entrada están presentes aún cuando el impulso se haya presentado en un tiempo  $n$  anterior. Por ejemplo, para  $n = 1$  en la Figura 4.7A(c), la secuencia  $v_1(k)$  refleja los efectos aún presentes en este momento  $n = 1$ , de los impulsos de la entrada que ya sucedieron en los momentos  $n = -1$  y  $n = 0$ , pero que están afectando al sistema  $h(k)$  en los tiempos auxiliares (no reales)  $k = 1$  y  $k = 2$  respectivamente, que, para esta secuencia (Figura 4.7A(c)), corresponden al tiempo real  $n = 1$ .

Este mismo razonamiento se puede aplicar a cada una de las secuencias de operaciones mostradas en las figuras correspondientes.



**Figura 4.7A** Secuencia de operaciones para (a)  $n = -1$ , (b)  $n = 0$  y (c)  $n = 1$

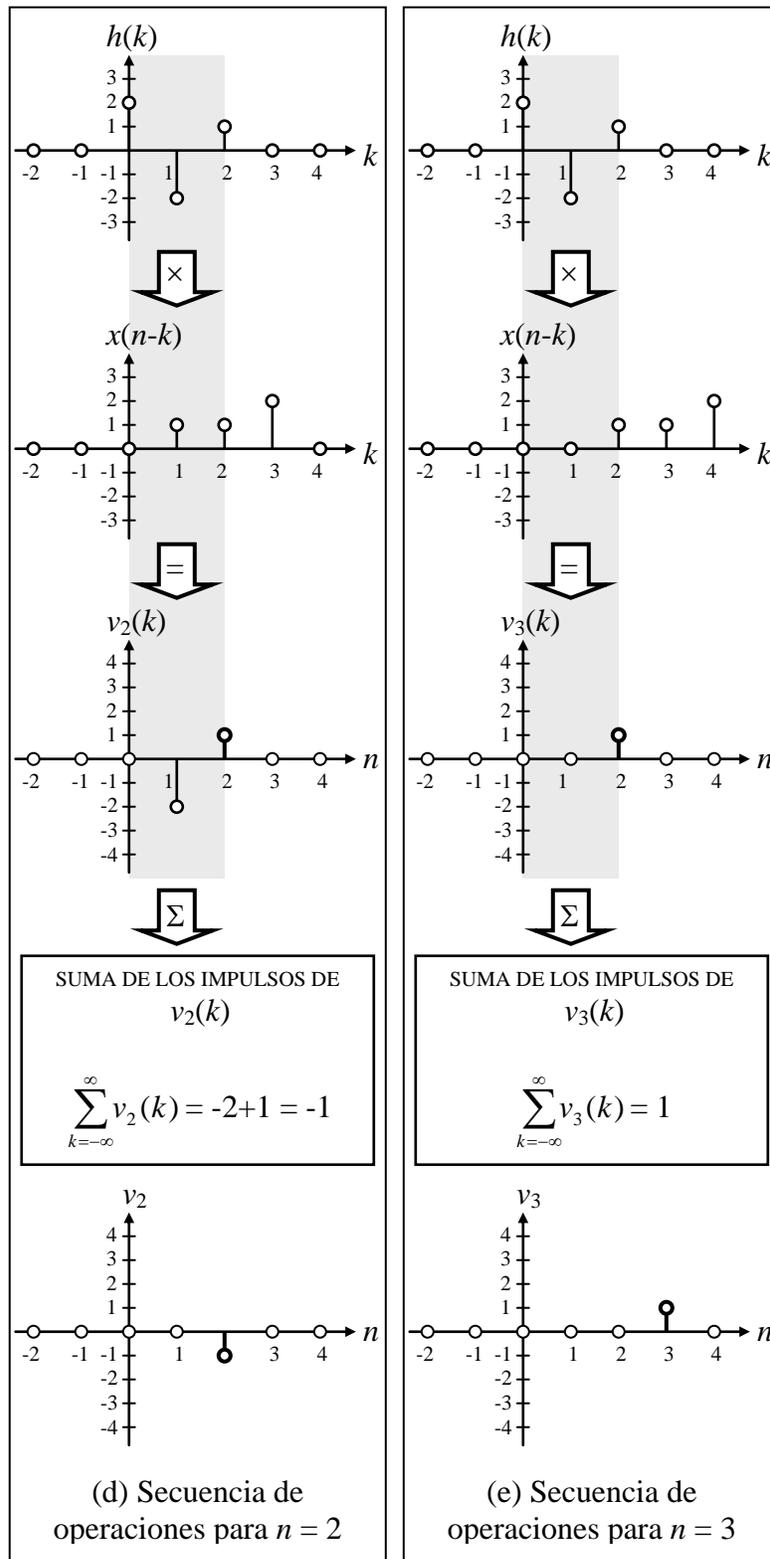
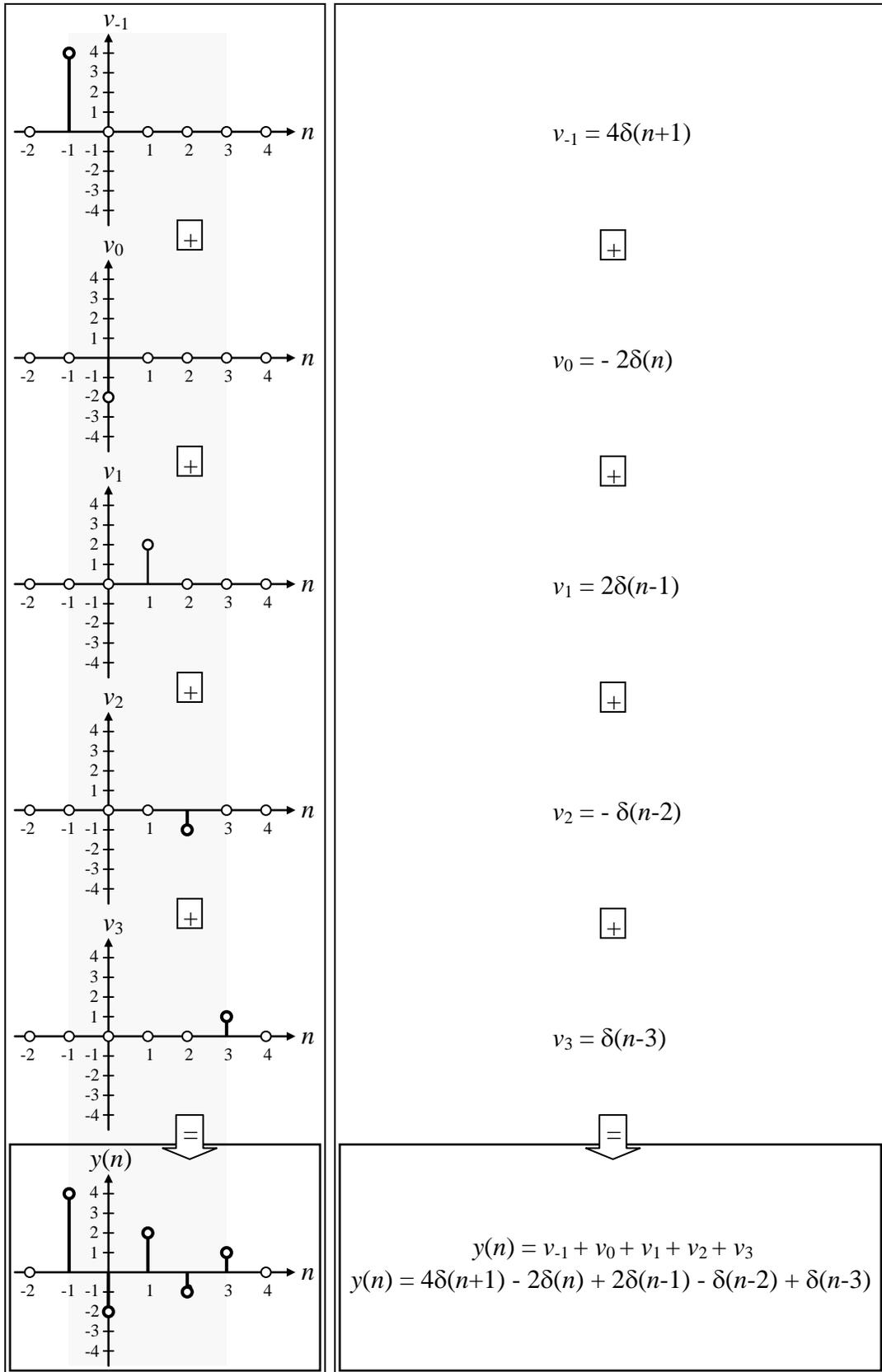


Figura 4.7B Secuencia de operaciones para (d)  $n = 2$  y (e)  $n = 3$



**Figura 4.8** Suma de todas las secuencias resultantes  $v_n$  para obtener la secuencia de salida  $y(n)$ .

5. Sumar todas las secuencias resultantes  $v_n$  para obtener la secuencia de salida  $y(n)$ , como se muestra en la Figura 4.8.

Como puede observarse, la secuencia de salida  $y(n)$  mostrada en la Figura 4.8 es igual a la secuencia de salida obtenida en la Figura 4.4.

El método presentado anteriormente en forma gráfica para obtener la secuencia de salida  $y(n)$  de un sistema LTI descrito por su respuesta al impulso unitario  $h(n)$ , cuando se le aplica una señal de entrada  $x(n)$ , corresponde a la operación matemática llamada *convolución*, la cual queda definida mediante la siguiente *suma de convolución*:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (4.1.2)$$

Se hace notar que el *método gráfico* mostrado anteriormente para obtener la secuencia de salida  $y(n)$ , es decir, para realizar la *suma de convolución* definida en (4.1.2) corresponde exactamente al desarrollo gráfico mostrado en las Figuras 4.7A y 4.7B desde  $n = -1$  hasta  $n = 3$ .

Como ya se explicó en el capítulo anterior, se puede observar en la expresión anterior (4.1.2), que el mantener fija la función  $h(k)$  y desplazar la función  $x(n-k)$ , es lo mismo que mantener fija a esta última y desplazar la función  $h(n-k)$ , como se muestra en la expresión (4.1.3) usando la notación de la operación de convolución. La prueba gráfica de esta afirmación se deja al estudiante.

$$y(n) = h(n) * x(n) = x(n) * h(n) \quad (4.1.3)$$

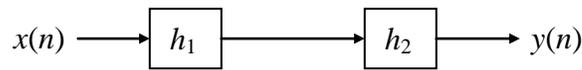
## 4.2 Propiedades de los sistemas LTI basadas en el comportamiento de su respuesta al impulso unitario

Con base en la respuesta de los sistemas LTI a una entrada impulso unitario, éstos presentan las siguientes propiedades:

### 1. Interconexiones

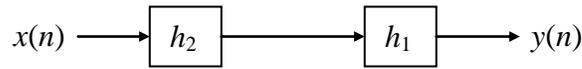
- Conexión en serie o cascada:

La *conexión en serie* de los sistemas LTI, así como las expresiones correspondientes para determinar las salida total en dichas conexiones, se muestra en la Figura 4.9. Como se puede observar en dicha figura, no importa el orden en la conexión en serie de los sistemas LTI, debido a la propiedad *conmutativa* de la convolución.



$$y(n) = [h_1(n) * h_2(n)] * x(n)$$

(a) Conexión en serie de los sistemas LTI  $h_1(n)$  y  $h_2(n)$ .



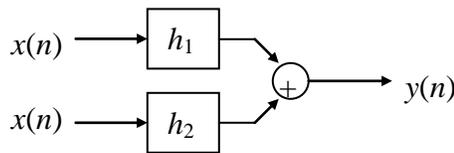
$$y(n) = [h_2(n) * h_1(n)] * x(n)$$

(b) Conexión en serie de los sistemas LTI  $h_2(n)$  y  $h_1(n)$ .

**Figura 4.9** Conexión en serie o cascada de dos sistemas LTI

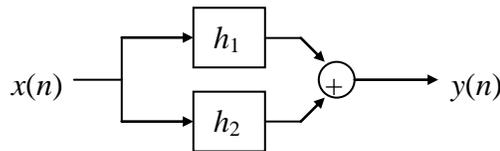
- Conexión en paralelo:

La *conexión en paralelo* de los sistemas LTI, así como las expresiones correspondientes para determinar las salida total en dichas conexiones, se muestra en la Figura 4.10. Obsérvese las diferentes maneras de conectar los sistemas LTI debido a la propiedad *asociativa* de la convolución.



$$y(n) = h_1(n) * x(n) + h_2(n) * x(n)$$

(a) Conexión en paralelo de los sistemas  $h_1(n)$  y  $h_2(n)$  con sus entradas independientes.



$$y(n) = [h_1(n) + h_2(n)] * x(n)$$

(b) Conexión en paralelo de los sistemas  $h_1(n)$  y  $h_2(n)$  con sus entradas comunes.

**Figura 4.10** Conexión en paralelo de dos sistemas LTI

## 2. Estabilidad

Los sistemas LTI son *estables* (BIBO) si y solo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable, es decir, si la respuesta del sistema a la entrada impulso unitario es finita:

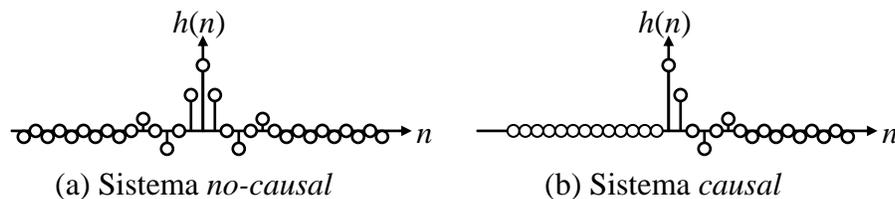
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (4.2.1)$$

## 3. Causalidad

Un sistema LTI es *causal* si y solo si su respuesta al impulso es cero para valores negativos de  $n$ , es decir, si y solo si:

$$h(n) = 0, \quad \text{para } n < 0 \quad (4.2.2)$$

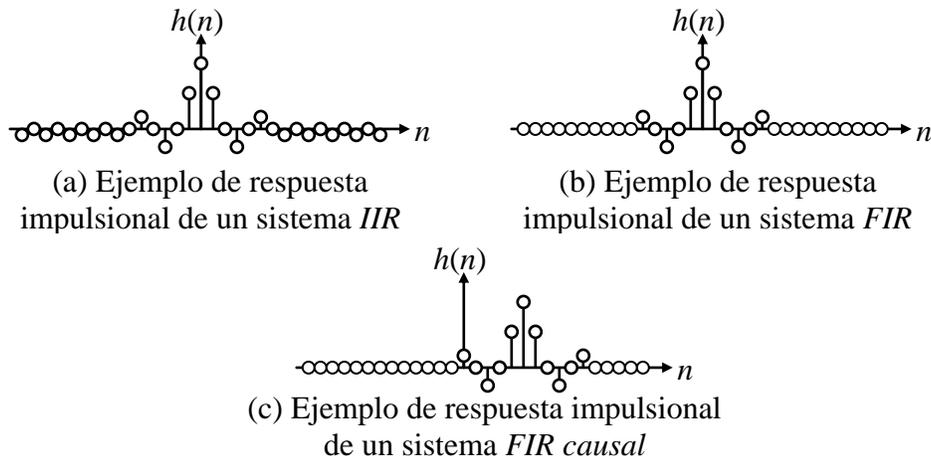
En la Figura 4.11 se muestra un ejemplo gráfico de una secuencia no-causal y una causal.



**Figura 4.11** Ejemplo gráfico de la respuesta al impulso de un sistema (a) *no-causal* y (b) *causal*

## 4.3 Clasificación de los sistemas LTI basada en su respuesta al impulso

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo se dividen en dos grandes grupos de acuerdo a la respuesta que presentan a la entrada impulso: los sistemas *FIR* (*Finite-duration Impulse Response*) son los que presentan una *respuesta finita* a la entrada impulso; es decir, la expresión correspondientes a la respuesta al impulso unitario  $h(n)$ , contienen un número *finito* de términos; mientras que los sistemas *IIR* (*Infinite-duration Impulse Response*), presentan una *respuesta infinita* a la entrada impulso, en otras palabras, el número de términos de la expresión correspondiente a su respuesta a la entrada impulso unitario, es *infinito*. En la Figura 4.12 se presenta un ejemplo gráfico de tres secuencias correspondientes a la respuesta al impulso de un sistema *IIR*, un sistema *FIR* y un sistema *FIR causal*.



**Figura 4.12** Ejemplos gráficos de la respuesta al impulso de un (a) un sistema *IIR*, (b) un sistema *FIR* y (c) un sistema *FIR causal*.

Un sistema *FIR* tiene una respuesta al impulso que es cero fuera de un intervalo determinado de tiempo, esto es:

$$h(n) = 0, \quad \text{para } n \geq M, \quad \text{con } M \neq \infty$$

Los sistema *FIR* que se presentan en estos apuntes serán además causales, es decir, cumplirán con las siguientes restricciones:

$$h(n) = 0, \quad \text{para } n < 0 \text{ y } n \geq M, \quad \text{con } M \neq \infty$$

por lo que la convolución para este tipo de sistemas se simplifica a:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \quad (4.3.1)$$

En la expresión (4.3.1) se puede observar que en el cálculo de la convolución solo estarán presentes las  $M$  muestras mas recientes de la señal de entrada, por lo que se dice que un sistema *FIR* tiene una memoria finita de  $M$  muestras.

Un sistema *IIR* tiene una respuesta al impulso de duración infinita, por lo que la expresión para el cálculo de la convolución para este tipo de sistemas, suponiendo también que el sistema es causal, será:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (4.3.2)$$

En la expresión (4.3.2) se observa que son necesarias un número infinito de muestras de la señal de entrada, por lo que se dice que un sistema *IIR* tiene una memoria infinita.