

6 Respuesta en frecuencia

En los capítulos anteriores se han estudiado varios métodos para obtener la respuesta de un sistema discreto *FIR* o *IIR* a una cierta señal de entrada. Existen algunas señales de entrada especiales, que al aplicarlas a un sistema discreto, generan información importante sobre las características de dicho sistema. Una de estas señales de entrada especiales lo constituye el impulso unitario $x(n) = \delta(n)$, el cual permite caracterizar completamente a los sistemas LTI. Otra señal de entrada especial es la secuencia exponencial compleja $x(n) = e^{j\omega n}$, la cual permitirá analizar el comportamiento frecuencial tanto de sistemas discretos como de señales discretas.

En este capítulo se estudia la representación de las señales y los sistemas discretos en el dominio de la frecuencia. Además se da una explicación muy detallada del concepto de respuesta en frecuencia y, finalmente, se presenta la propiedad de periodicidad de dicha respuesta.

6.1 Representación de señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia

Cuando a un sistema LTI, cuya respuesta al impulso unitario es $h(n)$, se le aplica una señal de entrada $x(n)$, su salida $y(n)$ estará dada por la suma de convolución mostrada en (6.1.1):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (6.1.1)$$

Para estudiar el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia, se utiliza una técnica matemática consistente en aplicar a dicho sistema una señal de entrada exponencial compleja $x(n) = e^{j\omega n}$ para toda n . La razón de aplicar este tipo de entrada de prueba al sistema LTI, es que la función exponencial compleja contiene una gran cantidad de información frecuencial en sí misma, y su comportamiento matemático es muy especial cuando se combina con otras funciones. La representación de una función sinusoidal (seno o coseno), es un caso particular de una combinación lineal de las funciones exponenciales complejas, como se muestra en las expresiones (6.1.2) y (6.1.3), y gráficamente en la Figura 6.1. Es debido a lo anterior, por lo que el comportamiento en el dominio de la frecuencia de un sistema discreto, se estudia aplicando a dicho sistema una señal de entrada exponencial compleja, y no simplemente una función senoidal o cosenoidal, ya que de hacerlo de esta última manera, se obtendrían resultados muy particulares y no generales como los obtenidos al aplicar la función exponencial compleja.

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2} \quad (6.1.2)$$

$$\sin(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j} \quad (6.1.3)$$

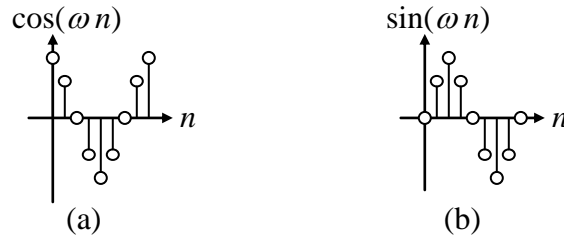


Figura 6.1 Representación gráfica de las funciones discretas (a) $\cos(\omega n)$ y (b) $\sin(\omega n)$

La función exponencial compleja mostrada en la expresión (6.1.4), se puede estudiar de dos formas diferentes:

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n) \quad (6.1.4)$$

1. Mediante coordenadas rectangulares, a través de sus componentes *real* e *imaginaria* como se muestra en las expresiones (6.1.5) y (6.1.6), y gráficamente en la Figura 6.2.

$$\text{Re}\{e^{j\omega n}\} = \text{Re}\{\cos(\omega n) + j\sin(\omega n)\} = \cos(\omega n) \quad (6.1.5)$$

$$\text{Im}\{e^{j\omega n}\} = \text{Im}\{\cos(\omega n) + j\sin(\omega n)\} = \sin(\omega n) \quad (6.1.6)$$

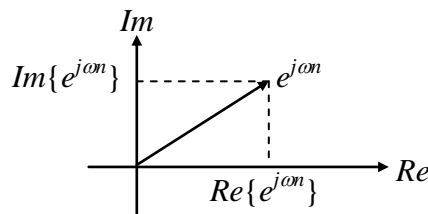


Figura 6.2 Representación gráfica en coordenadas cartesianas de la función exponencial compleja $e^{j\omega n}$

2. Mediante coordenadas polares, a través de sus componentes de *magnitud* y *fase* como se muestra en las expresiones (6.1.7) y (6.1.8), y gráficamente en la Figura 6.3.

$$|e^{j\omega n}| = |\cos(\omega n) + j \sin(\omega n)| = \sqrt{\cos^2(\omega n) + \sin^2(\omega n)} = 1 \quad (6.1.7)$$

$$\angle e^{j\omega n} = \angle[\cos(\omega n) + j \sin(\omega n)] = \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\omega n)}{\cos(\omega n)}\right) = e^{j\theta(\omega)} \quad (6.1.8)$$

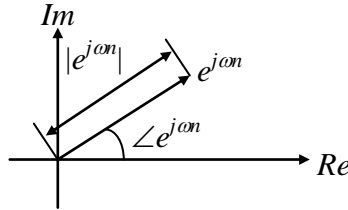


Figura 6.3 Representación gráfica en coordenadas polares de la función exponencial compleja $e^{j\omega n}$

Para estudiar el comportamiento de los sistemas LTI en el dominio de la frecuencia, se aplicará entonces una señal de entrada consistente en una secuencia exponencial compleja, es decir $x(n) = e^{j\omega n}$, como se muestra en (6.1.9):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} \quad (6.1.9)$$

Reacomodando términos, la expresión (6.1.9) se puede re-escribir como se muestra en (6.1.10):

$$y(n) = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \right) \quad (6.1.10)$$

La expresión que se encuentra dentro del paréntesis se define como la función $H(e^{j\omega})$, como se indica en (6.1.11):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \quad (6.1.11)$$

Por lo tanto, sustituyendo (6.1.11) en (6.1.10), $y(n)$ se puede expresar como:

$$y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (6.1.12)$$

De la ecuación anterior se puede ver que cuando la señal de entrada a un sistema LTI es una secuencia exponencial compleja $x(n) = e^{j\omega n}$, la salida de dicho sistema $y(n)$ será la misma secuencia exponencial compleja multiplicada por una función $H(e^{j\omega})$, la cual, a su vez, es función de la respuesta al impulso unitario $h(n)$ del sistema LTI. Cuando en la salida

del sistema aparece la misma función que se aplicó a la entrada, en este caso la secuencia exponencial compleja $e^{j\omega n}$, se dice que $e^{j\omega n}$ es una *eigenfunción* del sistema, y su *eigenvalor* es $H(e^{j\omega})$.

La función $H(e^{j\omega})$ que aparece en la respuesta $y(n)$ del sistema LTI y que se muestra en (6.1.13):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \quad (6.1.13)$$

se conoce como la *respuesta en frecuencia* del sistema LTI, y como es una función compleja, se puede expresar en sus componentes polares de magnitud y fase, como se muestra en (6.1.14):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (6.1.14)$$

donde $|H(e^{j\omega})|$ y $\theta(\omega) = \angle H(e^{j\omega})$ corresponden a las respuestas en magnitud y fase respectivamente, del sistema LTI.

Se hace notar nuevamente que la función de respuesta en frecuencia del sistema discreto $H(e^{j\omega})$, depende exclusivamente de la función de respuesta del sistema al impulso $h(n)$, cuando la señal de entrada es la función exponencial compleja $e^{j\omega n}$, como se puede observar en (6.1.11). Esto confirma nuevamente que la función de respuesta del sistema al impulso $h(n)$, caracteriza completamente al sistema discreto, inclusive en lo relativo a su respuesta en frecuencia.

Ejemplo 6.1.1

Determine si la función $x(n) = 5^n$ es una eigenfunción de sistemas LTI.

Solución.

Sustituyendo la secuencia de entrada $x(n) = 5^n$ en la suma de convolución correspondiente a la respuesta de un sistema LTI dada en (6.1.9) resulta:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)[5^{(n-k)}]$$

$$y(n) = 5^n \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)[5^{-k}] \right)$$

$$y(n) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) [5^{-k}] \right) x(n)$$

En la expresión anterior se puede observar que la misma secuencia de entrada $x(n) = 5^n$, vuelve a aparecer en la secuencia de salida $y(n)$, lo cual significa que $x(n) = 5^n$, $|n| < \infty$, es una eigenfunción de sistemas LTI.

Ejemplo 6.1.2

Obtener la respuesta en frecuencia del sistema LTI retardador ideal definido por:

$$y(n) = x(n-n_d) \quad (6.1.2.1)$$

donde n_d es un entero fijo.

Solución.

Para este ejemplo sencillo se presentan dos métodos diferentes para encontrar la respuesta en frecuencia:

1. METODO 1. En este método se proponen cuatro pasos:
 - (i) Obtener la respuesta del sistema al impulso.
 - (ii) Plantear la suma de convolución para determinar la respuesta del mismo a cualquier entrada.
 - (iii) Evaluar la suma de convolución anterior para una señal de entrada correspondiente a la secuencia exponencial compleja.
 - (iv) Obtener la magnitud y fase de la expresión resultante del paso anterior.
2. METODO 2. En este método, se aplica directamente al sistema una señal de entrada correspondiente a la secuencia exponencial compleja, obteniendo directamente la respuesta en frecuencia del sistema (magnitud y fase).

A continuación se describen de manera detallada cada uno de los métodos propuestos.

1. METODO 1.

- (i) *Obtención de la respuesta del sistema al impulso.*- Si al sistema descrito por (6.1.2.1) se le aplica una entrada impulso unitario $x(n) = \delta(n)$, entonces la respuesta del sistema $y(n)$ corresponderá a la respuesta al impulso unitario $h(n)$, esto es:

$$y(n) = \delta(n-n_d)$$

Por lo tanto, la respuesta al impulso unitario será:

$$h(n) = \delta(n-n_d) \quad (6.1.2.2)$$

- (ii) *Planteamiento de la suma de convolución.*- La suma de convolución para obtener la respuesta del sistema $y(n)$ para cualquier entrada $x(n)$, será:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (6.1.2.3)$$

- (iii) *Evaluación de la suma de convolución.*- Aplicando en la entrada una secuencia exponencial compleja $x(n) = e^{j\omega n}$, y sustituyendo (6.1.2.2) en (6.1.2.3), resulta:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k - n_d) e^{j\omega(n-k)}$$

$$y(n) = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k - n_d) e^{-j\omega k} \right) \quad (6.1.2.4)$$

Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del sistema se obtiene de (6.1.2.4), tomando la expresión entre paréntesis, de acuerdo a la definición de respuesta en frecuencia, es decir:

$$H(e^{j\omega n}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k - n_d) e^{-j\omega k} \quad (6.1.2.5)$$

Al efectuar la sumatoria sobre k , se llega al siguiente resultado:

$$H(e^{j\omega n}) = e^{-j\omega n_d} \quad (6.1.2.6)$$

- (iv) *Obtener la magnitud y fase.*- De (6.1.2.6) se obtiene finalmente la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema:

$$\text{magnitud: } |H(e^{j\omega n})| = 1; \quad \text{fase: } \angle H(e^{j\omega n}) = -\omega n_d$$

2. METODO 2. Mediante este método no es necesario encontrar la respuesta al impulso unitario del sistema descrito por (6.1.2.1), debido a la sencillez del mismo. En este método directamente se le aplica al sistema una secuencia exponencial compleja como entrada $x(n) = e^{j\omega n}$, y la salida $y(n)$ estará dada por:

$$y(n) = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n} \quad (6.1.2.7)$$

de donde se observa que, para cualquier valor de ω , la salida $y(n)$ corresponde a la entrada $x(n) = e^{j\omega n}$ multiplicada por una función compleja $e^{-j\omega n_d}$ cuyo valor depende de ω . Por consiguiente, la respuesta en frecuencia del retardador es:

$$H(e^{j\omega n}) = e^{-j\omega n_d} \quad (6.1.2.8)$$

con magnitud y fase dadas por:

$$\text{magnitud: } |H(e^{j\omega n})| = 1; \quad \text{fase: } \angle H(e^{j\omega n}) = -\omega n_d$$

Del resultado anterior obtenido por los dos métodos, se puede observar que el sistema no afecta la magnitud de la salida $y(n)$ del mismo, pero sí altera la fase linealmente, con pendiente $-n_d$, conforme varía la frecuencia ω , por eso a este sistema se le llama *retardador ideal*.

6.2 El concepto de respuesta en frecuencia

En esta sección se presenta, de manera gráfica, el significado de todos los términos involucrados en la expresión (6.1.13) que define la respuesta en frecuencia de la función $h(n)$ asociada a un *sistema discreto*, o de cualquier *señal discreta* $f(n)$. Para ello se repiten algunas de las explicaciones presentadas en la sección anterior, pero dentro de un contexto visual, con el fin de ayudar a comprender el concepto de la respuesta en frecuencia.

Para un sistema LTI definido por la suma de convolución mostrada en la expresión (6.2.1):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (6.2.1)$$

se puede observar que la respuesta del sistema $y(n)$ depende de la respuesta de dicho sistema al impulso unitario $h(n)$ y de la señal de entrada $x(n)$ que se le aplique.

La realización gráfica de la suma de convolución, así como su significado, se presenta detalladamente en el capítulo 4, por lo que se recomienda consultar dicho capítulo antes de continuar con este estudio, ya que las descripciones que siguen se basan en dicho método gráfico para la convolución.

Una señal importante que permite obtener la respuesta en frecuencia de un sistema discreto LTI, es la señal exponencial compleja $e^{j\omega n}$. Cuando esta señal se aplica a la entrada del sistema como $x(n) = e^{j\omega n}$, cada uno de los términos que se generan en la suma de convolución (6.2.1), tienen un significado preciso que permiten comprender el concepto de la respuesta en frecuencia del sistema. Mas adelante, se aplicará esta misma técnica para estudiar la respuesta en frecuencia de señales discretas.

La expresión (6.2.2) muestra la suma de convolución cuando la entrada al sistema $x(n)$ es la función exponencial compleja:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} \quad (6.2.2)$$

De dicha expresión se observa que para realizar la suma es necesario desplazar y reflejar la señal de entrada $x(n-k) = e^{j\omega(n-k)}$, y multiplicarla por la respuesta al impulso del sistema $h(n)$. Desde un punto de vista matemático, el índice k en la expresión anterior, se puede considerar como un *índice interno* de la sumatoria, es decir, el valor de dicho índice está determinado por la sumatoria misma, mientras que el índice n es un *índice externo* a la sumatoria, y es el usuario quien determina su valor de acuerdo a la muestra que quiera analizarse. Por lo tanto, este tiempo discreto n corre de manera externa a la sumatoria, y su significado dentro de la sumatoria, es la de desplazar la secuencia de entrada un tiempo n . Finalmente, el valor de la frecuencia ω también lo determina el usuario, y depende de la frecuencia de la exponencial compleja aplicada como señal de entrada.

En la Figura 6.4 se muestran las gráficas de la secuencia exponencial compleja mediante sus componentes *real* e *imaginaria*. Como ejemplo, para realizar las gráficas, se utilizó una frecuencia $\omega = \pi/4$ Rad/seg. Las Figuras 6.4a y 6.4b corresponden a las componentes *real* e *imaginaria*, respectivamente, de la secuencia exponencial compleja original $e^{j\omega n}$. Las Figuras 6.4c y 6.4d representan las mismas componentes para la secuencia exponencial reflejada $e^{j\omega(-k)}$.

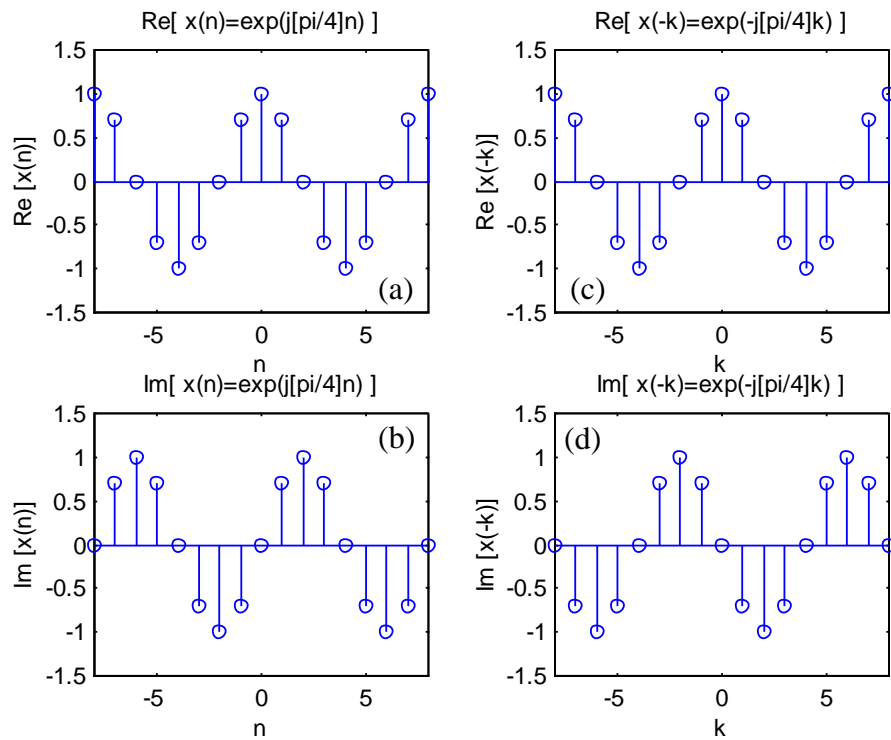


Figura 6.4 Representación gráfica de las componentes *real* e *imaginaria* de la secuencia exponencial compleja $e^{j\omega n}$ original [(a) y (b)], y la secuencia reflejada $e^{j\omega(-k)}$ [(c) y (d)]

Para explicar el comportamiento de un sistema LTI cuando se le aplica una señal de entrada $x(n) = e^{j\omega n}$, se propone, como ejemplo ilustrativo, el sistema LTI que se muestra en la Figura 6.5 y cuya respuesta al impulso $h(n)$ está dada en la expresión (6.2.3). Se propone también aplicar la señal de entrada mostrada en la Figura 6.4, la cual tiene una amplitud de 1, un período $N = 8$ y una frecuencia $\omega = 2\pi/8 = \pi/4$.

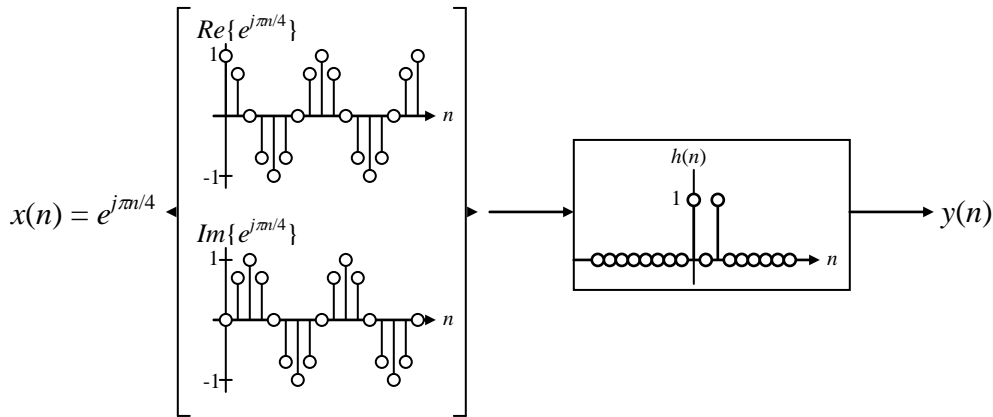
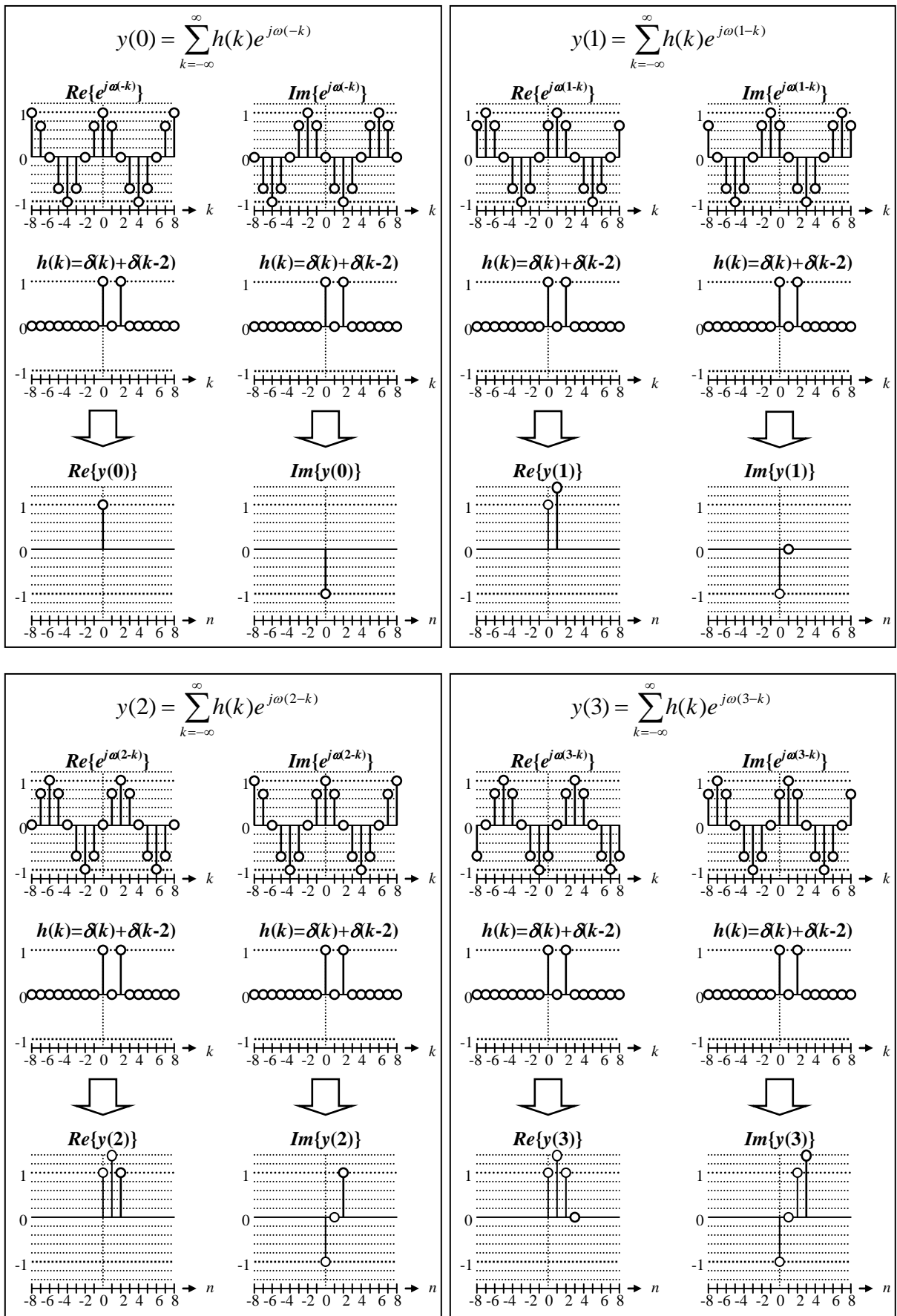


Figura 6.5 Sistema LTI con una señal de entrada $x(n) = e^{j\pi n/4}$ y con respuesta al impulso $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-2) \quad (6.2.3)$$

La salida $y(n)$ se calcula para cada valor de n mediante la suma de convolución mostrada en (6.2.2). El desarrollo gráfico de dicha expresión se muestra en la Figura 6.6 desde $n = 0$ hasta $n = 7$. En dicha figura se observa que, para cada valor de n , se convolucionan por separado cada una de las componentes de la función exponencial con la respuesta al impulso $h(n)$ que define al sistema, obteniéndose las componentes real e imaginaria de la señal de salida $y(n)$. En la parte superior de cada conjunto de gráficas que se encuentran enmarcadas en un cuadro, se presenta la expresión de convolución correspondiente al cálculo que se desarrolla para un valor determinado del tiempo discreto n . El primer par de gráficas, dentro de cada cuadro, corresponde a las componentes real e imaginaria de la función exponencial compleja desplazada y reflejada $e^{j\omega(n-k)}$; las gráficas de la parte media corresponden a la respuesta al impulso $h(k)$ del sistema propuesto y, finalmente, al realizar el producto (verticalmente) de las funciones correspondientes para cada valor de k , y después de sumar los resultados para cada una de ellas, se obtiene como resultado el par de gráficas que aparecen en la parte inferior (debajo de las flechas respectivas), en donde se muestran las componentes real e imaginaria de la señal de salida $y(n)$ del sistema.

Obsérvese, en cada gráfica, que el acotamiento de los ejes de tiempo para las funciones exponencial compleja $e^{j\omega(n-k)}$ y respuesta al impulso $h(k)$, se encuentra representado por la variable auxiliar discreta k , la cual varía de acuerdo a la sumatoria de la expresión correspondiente, mientras que el acotamiento de los ejes de tiempo para las componentes real e imaginaria de la señal de salida $y(n)$, se encuentra representado por la



78 **Figura 6.6a** Desarrollo gráfico de la suma de convolución dada en la expresión (6.2.2) desde $n = 0$ hasta $n = 3$, para una frecuencia de la señal de entrada $\omega = \pi/4$.

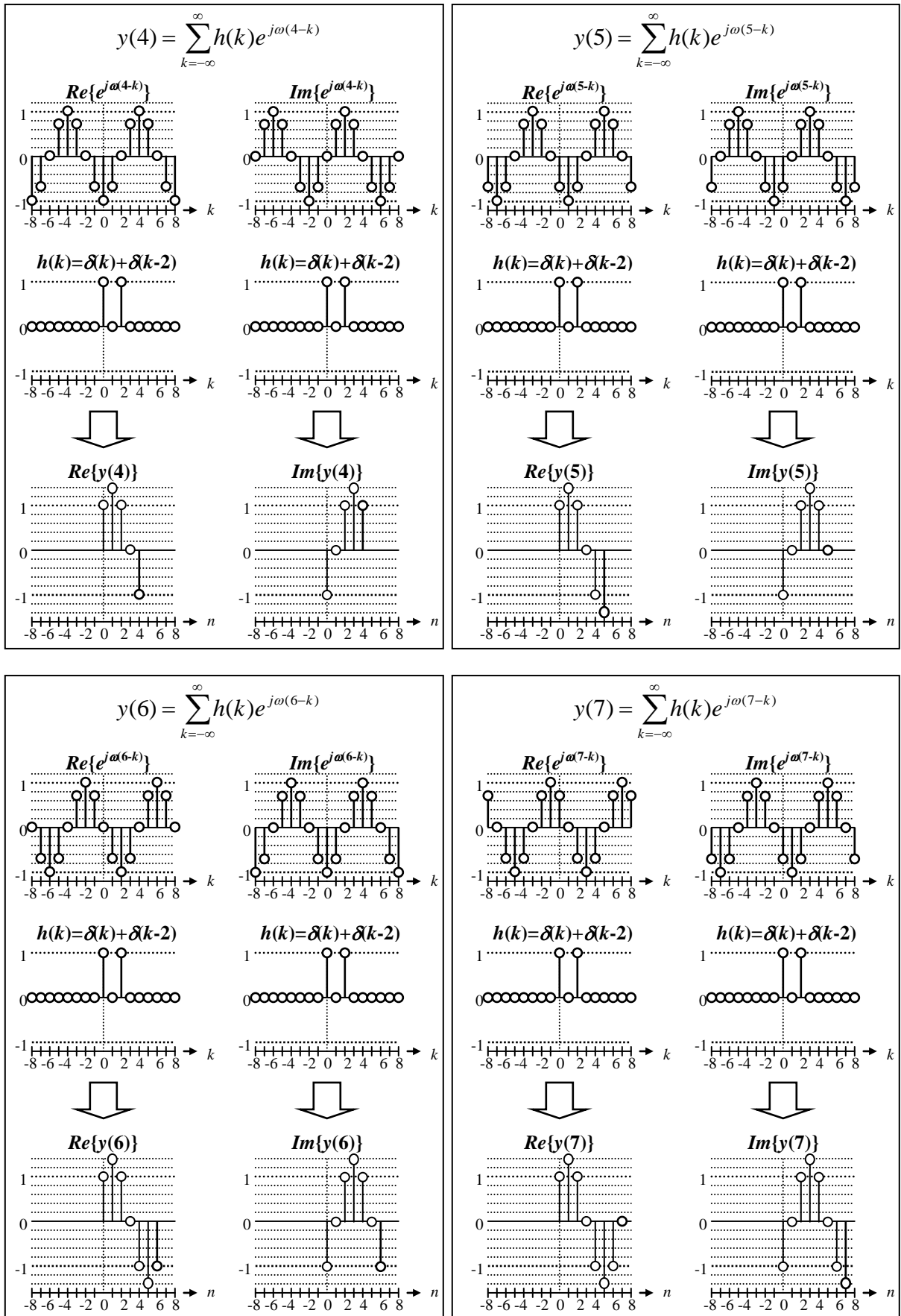


Figura 6.6b Desarrollo gráfico de la suma de convolución dada en la expresión (6.2.2) desde $n = 4$ hasta $n = 7$, para una frecuencia de la señal de entrada $\omega = \pi/4$.

variable discreta n , cuyo valor se establece arbitrariamente dependiendo de la muestra que se quiera analizar.

En la figura anterior se puede observar que el producto $h(k)e^{j\omega(n-k)}$ tomará el valor que le corresponde de acuerdo a la k evaluada, solamente cuando la respuesta del sistema al impulso unitario $h(k)$ sea diferente de cero. Con este método gráfico se obtiene la respuesta temporal del sistema $y(n)$ a la secuencia de entrada exponencial compleja $x(n) = e^{j\omega n}$ para cada valor de n .

Se puede observar que para valores de $n \geq 8$ (suponiendo el sistema causal), la gráfica de $y(n)$ se repite periódicamente con período $N = 8$, igual al período fundamental de la señal de entrada $x(n)$ propuesta.

Una señal sinusoidal aplicada a la entrada de un sistema LTI siempre generará a su salida otra señal sinusoidal de la misma frecuencia, como se puede observar en la Figura 6.7 para el ejemplo propuesto.

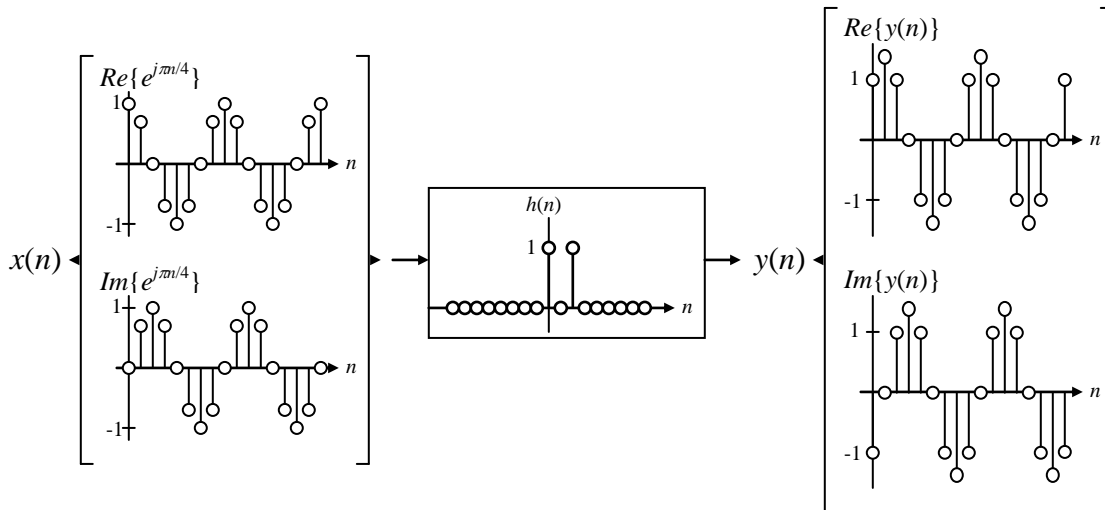


Figura 6.7 Respuesta de un sistema LTI a una señal de entrada $x(n) = e^{j\pi n/4}$, ($\omega = \pi/4$), y con respuesta al impulso $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

En la figura anterior se puede notar que, para este ejemplo, existe un desfase de la señal de salida $y(n)$ con respecto a la señal de entrada aplicada $x(n)$.

Si en el ejemplo anterior se aumenta la frecuencia de la señal de entrada, la amplitud de la señal de salida se verá afectada, como se muestra en los resultados obtenidos gráficamente en las Figuras 6.8 y 6.9 para dos diferentes frecuencias de la señal de entrada.

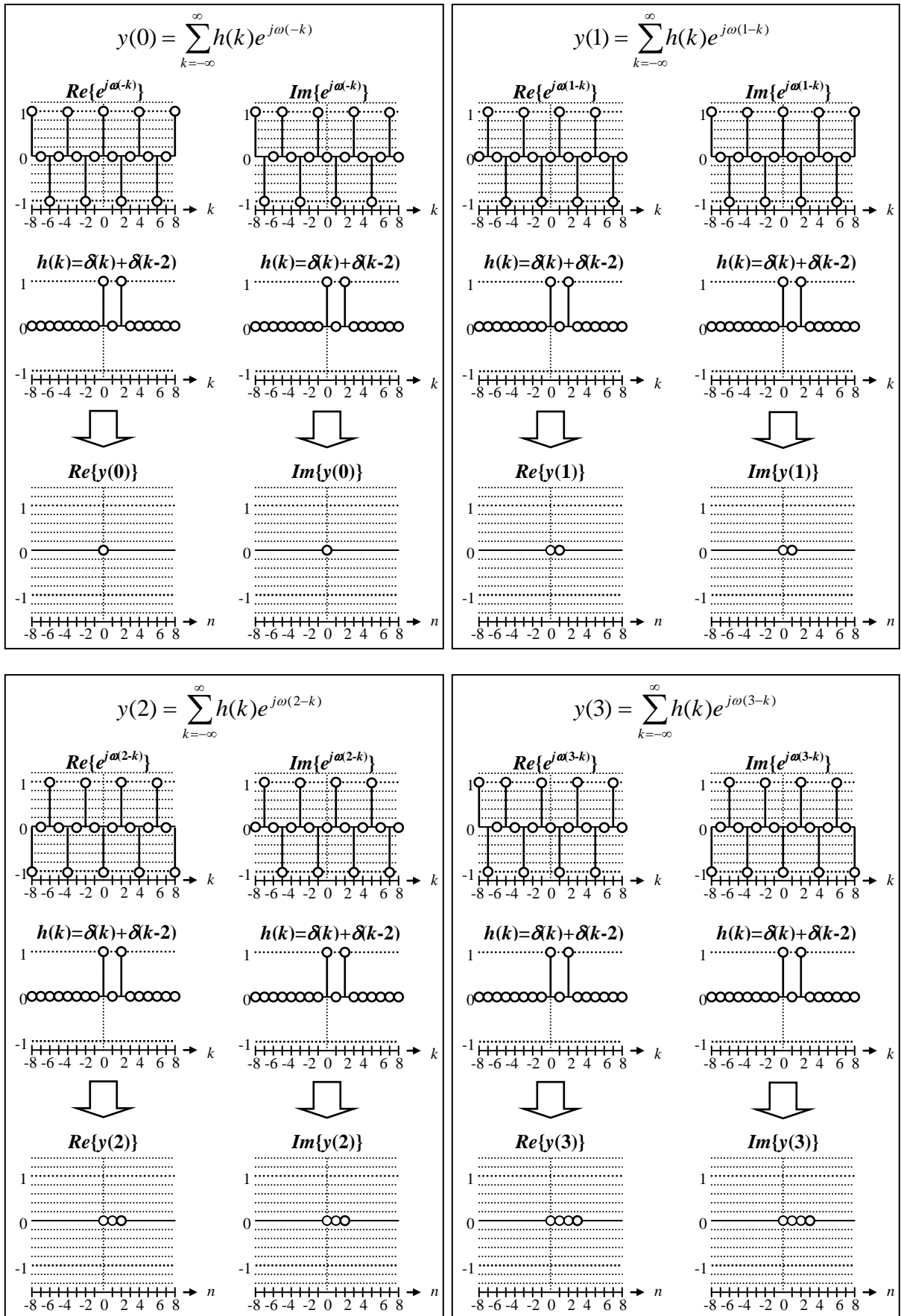
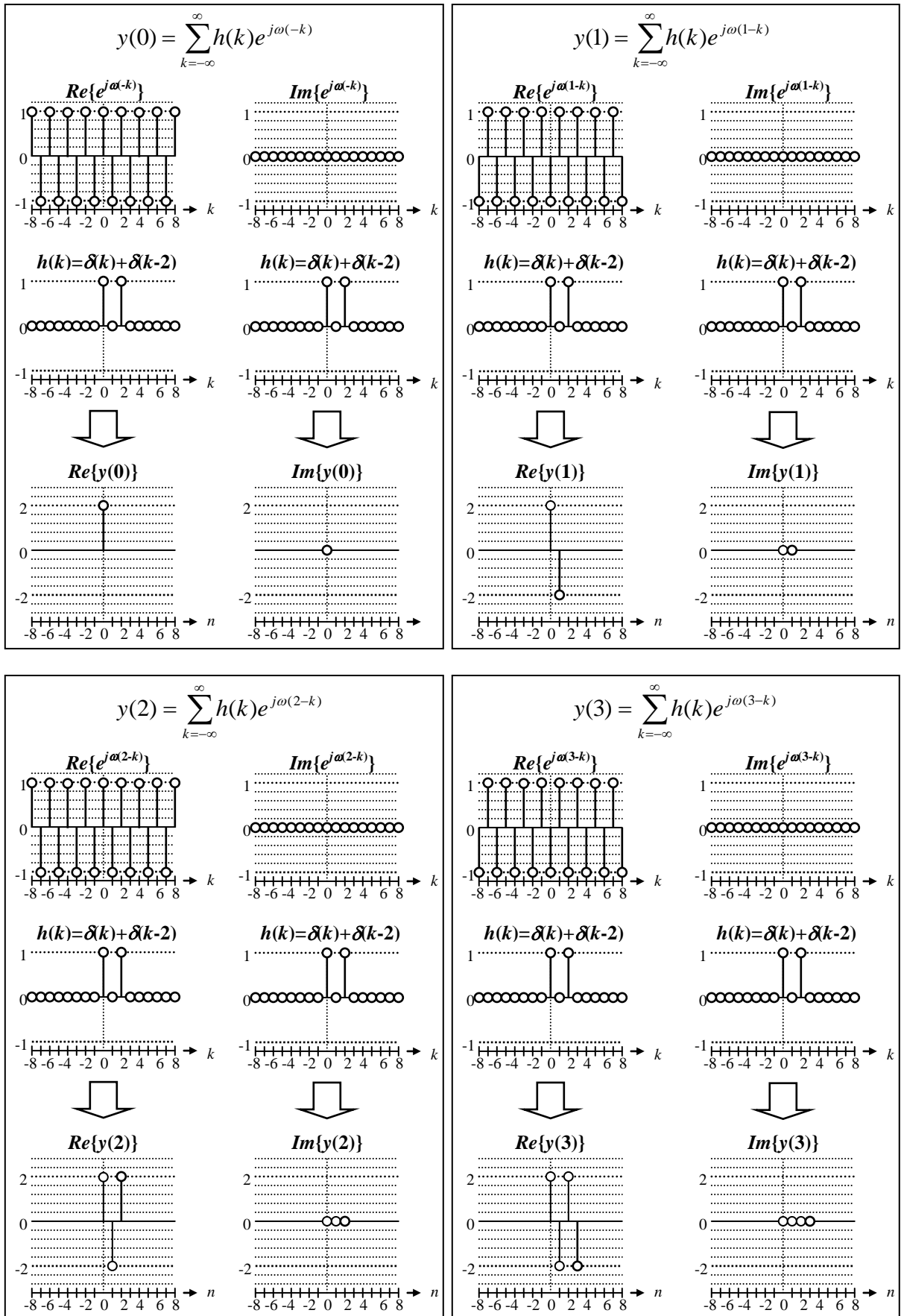


Figura 6.8 Desarrollo gráfico de la suma de convolución dada en la expresión (6.2.2) desde $n = 0$ hasta $n = 3$, para una frecuencia de la señal de entrada $\omega = \pi/2$.



82 **Figura 6.9** Desarrollo gráfico de la suma de convolución dada en la expresión (6.2.2) desde $n = 0$ hasta $n = 3$, para una frecuencia de la señal de entrada $\omega = \pi$.

En las dos figuras anteriores solo se muestran cuatro tiempos (desde $n = 0$ hasta $n = 4$), debido a que, en la Figura 6.8, la señal de salida es nula para cualquier otro valor de n , y en la Figura 6.9, se puede apreciar la periodicidad de la componente real de $y(n)$, sin que exista la componente imaginaria.

En las Figuras 6.10 y 6.11 se muestran las secuencias resultantes para cada señal de entrada aplicada al sistema propuesto.

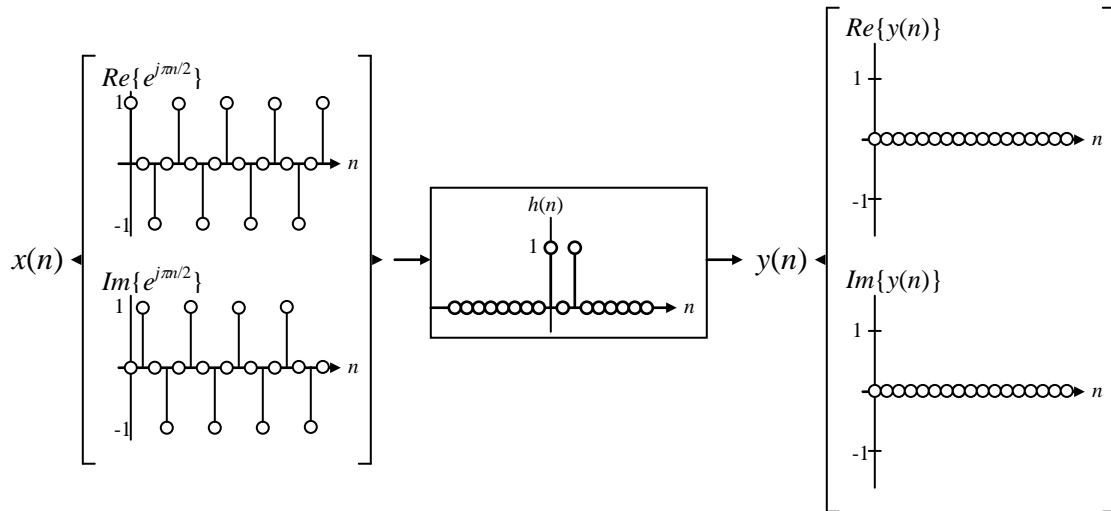


Figura 6.10 Respuesta de un sistema LTI a una señal de entrada $x(n) = e^{j\pi n/2}$, ($\omega = \pi/2$), y con respuesta al impulso $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

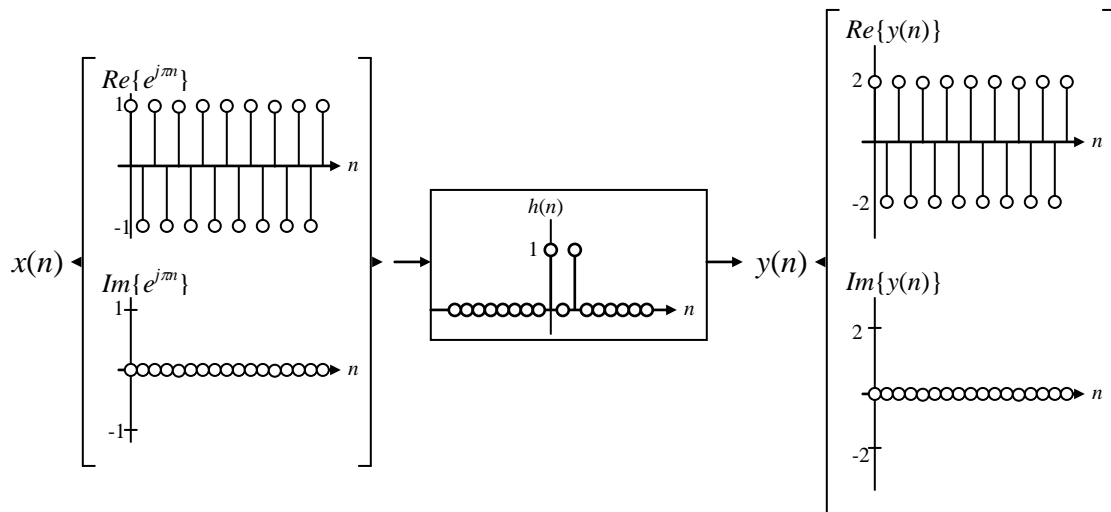


Figura 6.11 Respuesta de un sistema LTI a una señal de entrada $x(n) = e^{j\pi n}$, ($\omega = \pi$), y con respuesta al impulso $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

En las Figuras 6.9 y 6.11 se puede observar que la señal de entrada $x(n)$ es puramente real, es decir, no tiene componente imaginaria, por lo que la señal de salida $y(n)$ también es puramente real.

Si la frecuencia de la señal de entrada tiene un valor de cero, la salida del sistema será como se muestra en la Figura 6.12. El desarrollo de este caso se deja al estudiante.

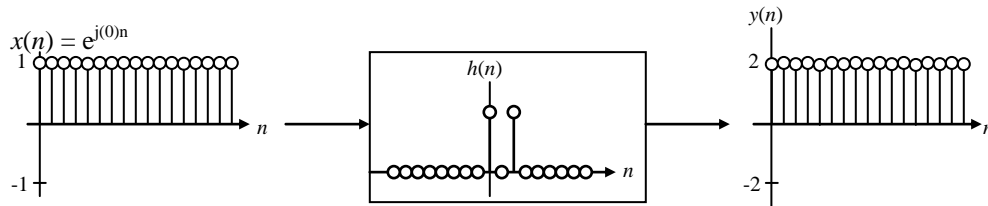


Figura 6.12 Respuesta de un sistema LTI a una señal de entrada $x(n) = e^{j(0)n}$, ($\omega = 0$) y con respuesta al impulso $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

En la Figura 6.10 se observa que, para el ejemplo propuesto, la frecuencia de la señal de entrada es tal que el sistema anula la señal en su salida, mientras que en la Figura 6.11, para una frecuencia mayor de la señal de entrada, la salida del sistema (componente real) presenta el doble de la amplitud de la señal de entrada (componente real). En la Figura 6.12, para una frecuencia de cero, la salida también presenta el doble de la amplitud de la señal de entrada. Con los resultados anteriores podría construirse una gráfica de la *magnitud* de la señal de salida $|y(n)|$ contra la frecuencia ω , y una gráfica de la *fase* de la señal de salida $\angle y(n)$ contra la frecuencia ω , generando lo que se conoce como un *diagrama de Bode* o de *respuesta en frecuencia*. Un bosquejo de cuatro puntos (para las cuatro frecuencias propuestas), de la *magnitud* de la respuesta en frecuencia del sistema LTI de ejemplo, construida con los resultados obtenidos anteriormente, se muestra en la Figura 6.13, en donde se encuentran representados los valores de la magnitud de la señal de salida del sistema $|y(n)|$ concentrados en la Tabla 6.1. Obsérvese en la Figura 6.13 que el eje de frecuencia está normalizado.

Frecuencia	Frecuencia normalizada	Magnitud de la señal de salida $y(n)$ del sistema
ω	ω/π	$ y(n) = \sqrt{[\text{Re}\{y(n)\}]^2 + [\text{Im}\{y(n)\}]^2}$
0	0.00	2.00
$\pi/4$	0.25	$\sqrt{2} = 1.41$
$\pi/2$	0.50	0.00
π	1.00	2.00

Tabla 6.1 Magnitud de la señal de salida $y(n)$ del sistema LTI de ejemplo, en función de la frecuencia

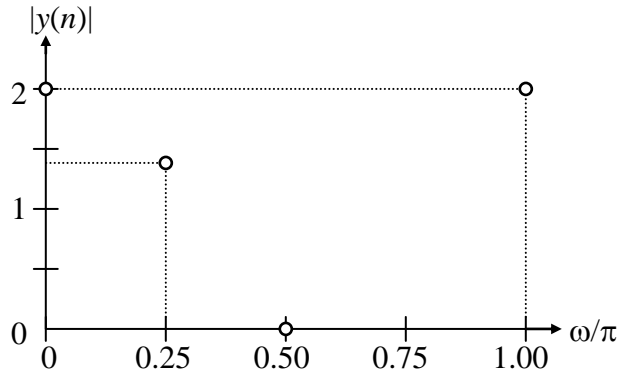


Figura 6.13 Bosquejo de cuatro puntos de la magnitud de la señal de salida $y(n)$ del sistema LTI de ejemplo, cuya respuesta al impulso está dada por $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

Si la frecuencia de la señal de entrada se varía en forma continua (de 0 a π por ejemplo), y se registra el comportamiento de la *señal de salida* para cada frecuencia, se obtendrá la *respuesta en frecuencia completa del sistema*. Como se puede observar en la Figura 6.13, con los datos graficados no es posible predecir el comportamiento de la respuesta en frecuencia del sistema en los valores de frecuencia intermedios.

La suma de convolución dada en (6.2.2) se puede re-escribir como se indica a continuación:

$$y(n) = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \right) \quad (6.2.4)$$

donde la expresión que se encuentra entre paréntesis, corresponde a la función que define la *respuesta en frecuencia* $[H(e^{j\omega})]$ del sistema descrito por la función $h(k)$, esto es:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (6.2.5)$$

La expresión dada en (6.2.5) es una función compleja para la cual se puede calcular su magnitud $|H(e^{j\omega})|$ y fase $\angle H(e^{j\omega})$, cuyos valores corresponderán a la amplitud y fase, respectivamente, de la *señal de salida* $y(n)$ del sistema LTI *para el caso especial* cuando $n = 0$, conforme varía la frecuencia de la señal de entrada $x(n) = e^{j\omega n}$, como se indica en la expresión (6.2.6).

$$y(0) = H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (6.2.6)$$

La importancia de lo que está representado en el método gráfico de la suma de convolución mostrado anteriormente (para los casos en que $n = 0$), radica en el hecho de que la *respuesta en frecuencia del sistema* definido en (6.2.6), se basa en la *respuesta al impulso unitario* $h(k)$ del mismo cuando la señal de entrada es una función exponencial.

Dicha respuesta está determinada por los valores del índice k , en los cuales tanto la función $h(k)$, como el producto $h(k)e^{-j\omega k}$, tendrán valores diferentes de cero y se sumarán (en el momento $n = 0$) para una frecuencia dada ω . Al cambiar el valor de la frecuencia ω , a $\omega + \Delta\omega$, serán sumados nuevos valores del producto $h(k)e^{-j(\omega + \Delta\omega)k}$ al correr el índice k de la sumatoria para esta nueva frecuencia, y así sucesivamente al ir variando la frecuencia (todo ésto para el mismo momento $n = 0$). Al generar un barrido en la frecuencia ω , se obtendrán nuevos valores de la suma de los productos $h(k)e^{-j\omega k}$ para cada valor de ω . La respuesta en frecuencia completa del sistema se obtiene graficando cada valor obtenido en la suma de los productos $h(k)e^{-j\omega k}$ contra la frecuencia ω , (magnitud y fase, por ser la respuesta en frecuencia una función compleja), haciendo notar que, al menos la magnitud de dicha respuesta en frecuencia, será una función continua de la frecuencia ω . El valor de $n = 0$ es importante porque solamente para dicho valor se cumple que la salida del sistema $y(n)$ refleja exactamente la respuesta en frecuencia del sistema definido por la función $h(n)$, como lo indica la expresión (6.2.6).

La gráfica de respuesta en frecuencia completa para el sistema LTI propuesto como ejemplo, se obtuvo simulando el sistema en MATLAB con el Programa , y los resultados obtenidos se muestran en la Figura 6.14.

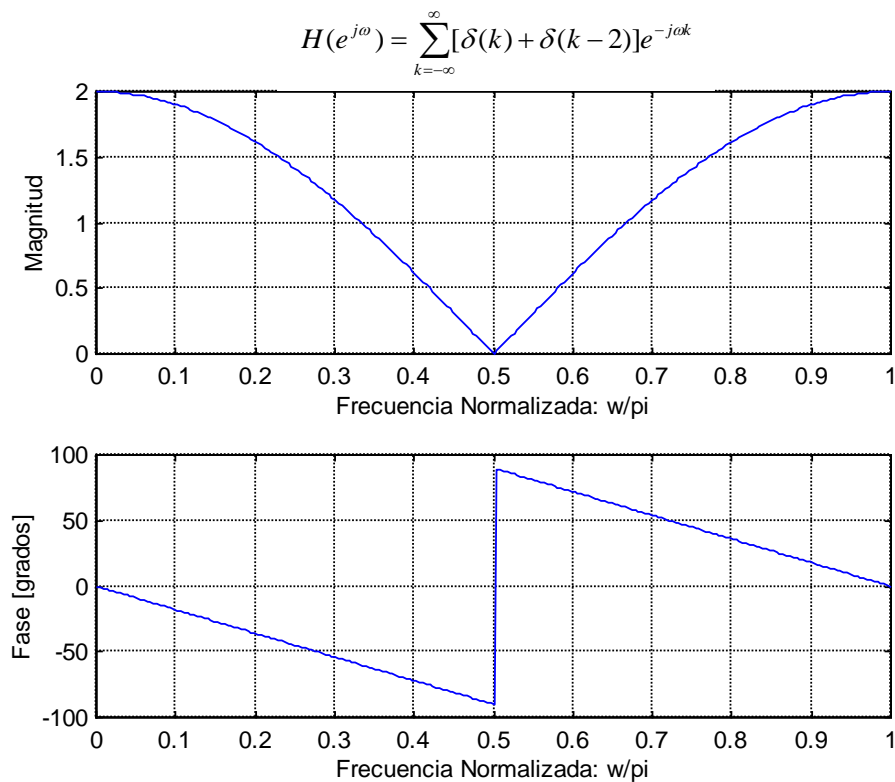


Figura 6.14 Respuesta en frecuencia del sistema LTI de ejemplo, cuya respuesta al impulso está dada por $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$

El procedimiento empleado para obtener la respuesta en frecuencia para un sistema LTI mediante la suma de convolución (6.2.5), se puede aplicar también a señales. Hasta ahora se mostró como obtener la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema descrito por la función $h(n)$. Sin embargo, si se aplica la misma suma de convolución (6.2.5) a una señal discreta cualquiera $x(n)$, se obtendrá la función $X(e^{j\omega})$ que define el comportamiento frecuencial de dicha señal $x(n)$, como se indica en la expresión mostrada en (6.2.7).

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \quad (6.2.7)$$

6.3 Periodicidad de la respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de sistemas LTI discretos, así como el contenido espectral de las señales discretas, es siempre una función periódica de la variable de frecuencia ω con período 2π , debido a la periodicidad de la secuencia exponencial compleja. Esto se puede ver sustituyendo ω por $(\omega + 2\pi)$ en la definición de respuesta en frecuencia dada por:

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j(\omega+2\pi)k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} e^{-j2\pi k} \quad (6.3.1)$$

que puede simplificarse a:

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega}) \quad (6.3.2)$$

debido a que $e^{-j2\pi k} = 1$ para k entero.

Puesto que la función $H(e^{j\omega})$ es periódica con período 2π , y ya que las frecuencias ω y $(\omega + 2\pi)$ son indistinguibles, solo es necesario especificar dicha función sobre un intervalo de 2π , por ejemplo: $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ó $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Para observar la periodicidad de la respuesta en frecuencia para sistemas discretos, en la Figura 6.15 se muestra la gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema LTI propuesto como ejemplo en la sección anterior (Sección 6.2), en un intervalo de frecuencias que va desde -2π hasta 2π .

Nuevamente se hace la observación de que la periodicidad mencionada en los párrafos anteriores, también se aplica al caso de señales discretas, lo cual podría probarse sustituyendo $h(k)$ en las expresiones (6.3.1) y (6.3.2) por cualquier secuencia $x(k)$, obteniendo la función de frecuencia periódica $X(e^{j\omega})$.

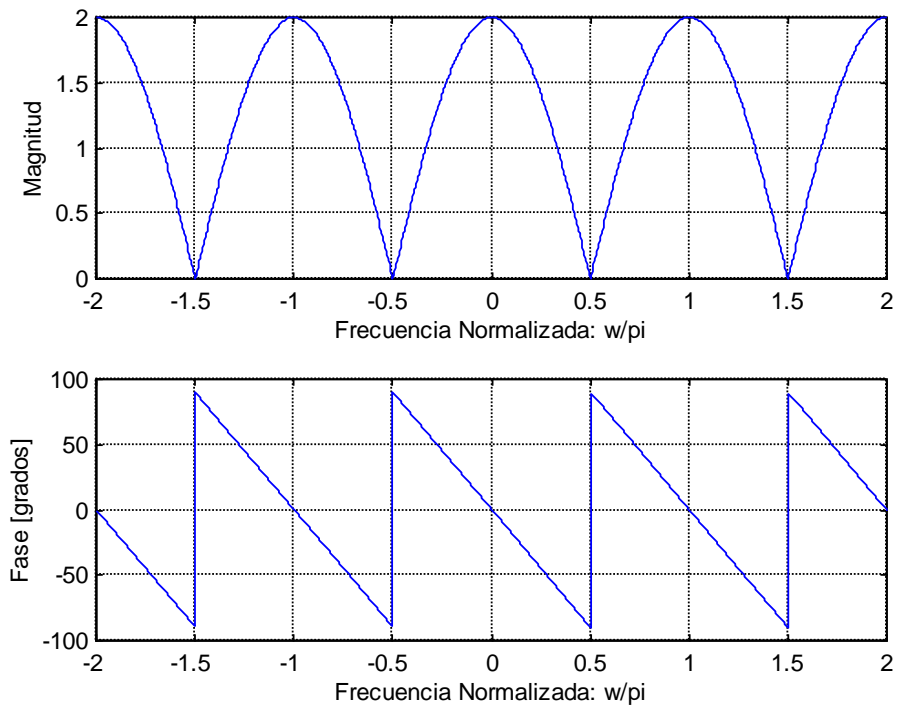


Figura 6.15 Respuesta en frecuencia del sistema LTI del ejemplo propuesto en la Sección 6.2, cuya respuesta al impulso está dada por $h(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$