

7 Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

En el capítulo anterior se obtuvo la respuesta en frecuencia de un sistema discreto LTI, así como el contenido frecuencial de una señal discreta, a partir de la expresión correspondiente a la convolución entre la función exponencial compleja $e^{j\omega n}$ y la función correspondiente al sistema LTI $h(n)$ o a la señal bajo estudio $x(n)$. En este capítulo se hará una descripción detallada de la definición y propiedades de lo que se conoce como la *Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)*, la cual corresponde precisamente a las funciones de respuesta en frecuencia o contenido espectral estudiadas anteriormente.

7.1 Transformada de Fourier de señales y sistemas en tiempo discreto

Para una secuencia discreta $x(n)$, la cual puede ser una señal como tal, o bien, la respuesta al impulso $h(n)$ de un sistema discreto LTI, su contenido frecuencial $X(e^{j\omega})$ se obtiene mediante la expresión dada en (7.1.1).

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (7.1.1)$$

Esta expresión genera una función *continua* de ω correspondiente al contenido frecuencial de la secuencia $x(n)$. A dicho contenido frecuencial se le conoce como *espectro de frecuencia* de la señal $x(n)$, y la expresión (7.1.1) corresponde precisamente a la definición de la *Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)* de la señal discreta $x(n)$.

En tiempo continuo, el espectro de una señal periódica se obtiene mediante la *Serie de Fourier* de dicha señal. Si la señal no es periódica, el espectro de ésta se determina a través de la *Transformada de Fourier* de la misma. En tiempo discreto, si la secuencia es periódica, su espectro se calcula mediante la *Serie de Fourier de Tiempo Discreto* de la secuencia, y si la secuencia no es periódica, su espectro se obtiene mediante la *Transformada de Fourier de Tiempo Discreto*. Esta última es el tema de estudio del presente capítulo, y se le nombrará abreviadamente como *DTFT* o simplemente *FT*.

Como se mencionó en el capítulo anterior, la función $X(e^{j\omega})$ definida en (7.1.1), la cual corresponde a la *DTFT* de la secuencia $x(n)$, es una función compleja y periódica con período 2π . Una condición suficiente para la existencia de la *FT* (para abreviar *DTFT*) es que la secuencia $x(n)$ sea absolutamente sumable, es decir, se debe cumplir que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (7.1.2)$$

Se puede recuperar la secuencia $x(n)$ a partir de $X(e^{j\omega})$ usando la *Transformada Inversa de Fourier de Tiempo Discreto (IDTFT)* que se define como:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \quad (7.1.3)$$

Obsérvese en la expresión anterior que los límites de integración son de $-\pi$ a π debido a la periodicidad de la función $X(e^{j\omega})$.

La *FT* también se conoce como *espectro de Fourier* o solamente *espectro*. A la magnitud y fase de la *FT* se les conoce también como *espectro de magnitud* y *espectro de fase* respectivamente.

De la expresión para la respuesta en frecuencia de un sistema LTI dada por (7.1.4):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (7.1.4)$$

se puede observar que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ es simplemente la *FT* de la respuesta al impulso $h(n)$. Por consiguiente, se puede usar la *IFT* para obtener la respuesta al impulso $h(n)$ a partir de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema, es decir:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (7.1.5)$$

Ejemplo 7.1.1

Para la secuencia exponencial real siguiente:

$$x(n) = a^n u(n)$$

con $|a| < 1$.

- Obtener la *FT* $X(e^{j\omega})$.
- Evaluar y graficar la magnitud y fase de la *FT* $X(e^{j\omega})$ obtenida en el inciso anterior, y graficar la secuencia propuesta $x(n)$.

Solución.

(a) Aplicando la definición de la *FT* a la secuencia dada $x(n)$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

La ecuación anterior es una serie geométrica con razón común $r = ae^{-j\omega}$. Puesto que $|r| = |a| < 1$, esta serie converge a la expresión $1/(1-r)$. Por consiguiente:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |\omega| < \pi$$

(b) Para encontrar los espectros de magnitud y fase de la expresión $X(e^{j\omega})$, se puede describir como:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - a \cos(\omega)) + ja \sin(\omega)}$$

de donde

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}}, \quad |\omega| < \pi$$

y

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1} \left[\frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} \right], \quad |\omega| < \pi$$

La gráfica de la secuencia original $x(n) = a^n u(n)$, así como las gráficas de la magnitud y fase de la expresión de la *FT* $X(e^{j\omega})$, se realizaron para un valor de $a = 0.9$, en MATLAB con el Programa 7.1.1 que se encuentra en el Apéndice A.

Las gráficas resultantes se muestran en las Figuras 7.1 y 7.2, para la secuencia propuesta y la *FT*, respectivamente.

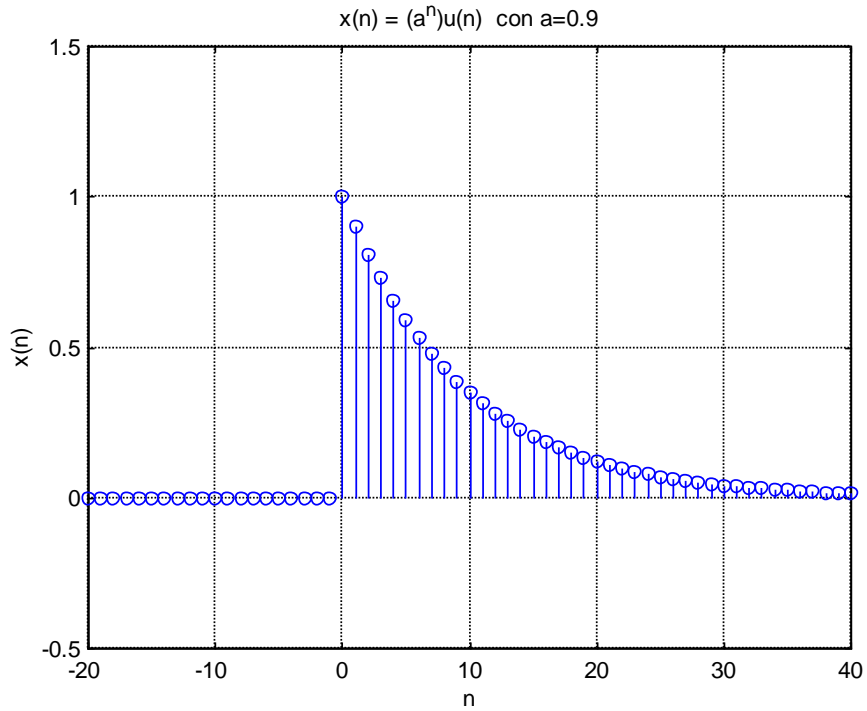


Figura 7.1 Gráfica de la secuencia $x(n) = a^n u(n)$ para $a = 0.9$

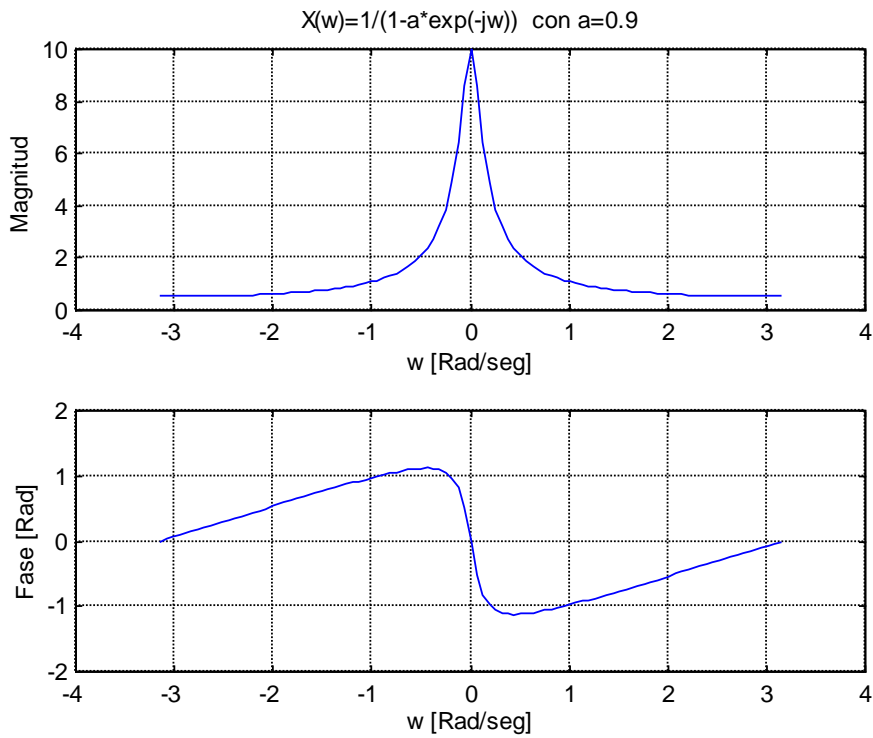


Figura 7.2 Gráficas de la magnitud y la fase de la FT: $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

Ejemplo 7.1.2

Considere un sistema *FIR* causal descrito por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = \frac{1}{M+1} [x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-M)] \quad (7.1.2.1)$$

que representa un *filtro de promedio móvil*, en el sentido de que la muestra de salida $y(n)$ en el tiempo n es simplemente el promedio de $(M+1)$ muestras de la entrada $x(n)$, $0 \leq n \leq M$. Obtener la respuesta en frecuencia de este filtro y graficarla.

Solución.

Para obtener la respuesta en frecuencia del filtro descrito por la ecuación en diferencias (7.1.2.1), se debe encontrar, en primer lugar, la respuesta al impulso $h(n)$ de dicho filtro, para poder calcular después la *FT* de dicha función $H(e^{j\omega})$. Entonces, la solución que se propone para este problema consistirá de dos partes, como se explicó anteriormente. Para poder graficar la respuesta en frecuencia resultante se propondrá un valor de M .

1. Cálculo de la respuesta al impulso del filtro de promedio móvil:

Recuérdese que la suma de convolución se define como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (7.1.2.2)$$

Re-escribiendo (7.1.2.1) en su forma cerrada, resulta:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{1}{M+1} x(n-k) \quad (7.1.2.3)$$

Comparando las ecuaciones (7.1.2.2) y (7.1.2.3), se puede observar que la respuesta al impulso unitario del filtro de promedio móvil, está dado por:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M+1}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.1.2.4)$$

2. Cálculo de la *FT* de la función $h(n)$ obtenida anteriormente:

La *FT* de $h(n)$ está dada por:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^M \frac{1}{M+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n}$$

Desarrollando esta expresión queda:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+M} (1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \dots + e^{-jM\omega}) \quad (7.1.2.5)$$

Se puede ver que la expresión resultante (7.1.2.5) es una serie geométrica con razón común $r = e^{-j\omega}$, de donde:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \left[\frac{1 - e^{-j(M+1)\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \right], \quad |\omega| < \pi \quad (7.1.2.6)$$

La ecuación (7.1.2.6) puede re-escribirse como:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \left[\frac{e^{-j(M+1)\omega/2} e^{j(M+1)\omega/2} - e^{-j(M+1)\omega}}{e^{-j\omega/2} e^{j\omega/2} - e^{-j\omega}} \right], \quad |\omega| < \pi$$

Esta última expresión corresponde a:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-jM\omega/2}}{M+1} \left[\frac{\sin((M+1)\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right], \quad |\omega| < \pi \quad (7.1.2.7)$$

donde esta ecuación (7.1.2.7) es el resultado deseado.

3. Graficación de la respuesta en frecuencia resultante:

Como ejemplo, para poder graficar, se propone un valor de $M = 4$ en (7.1.2.7), con lo cual se obtiene la siguiente expresión para la magnitud:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5} \left| \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right|, \quad |\omega| < \pi$$

y para la fase:

$$\angle[H(e^{j\omega})] = \angle[H_1(e^{j\omega})] + \angle[H_2(e^{j\omega})]$$

donde:

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}, \quad |\omega| < \pi$$

y

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{5} \left| \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right|, \quad |\omega| < \pi$$

Las gráficas de magnitud y fase se realizaron en MATLAB con el Programa 7.1.2 que se encuentra en el Apéndice A.

Las gráficas correspondientes se muestran en la Figura 7.3.

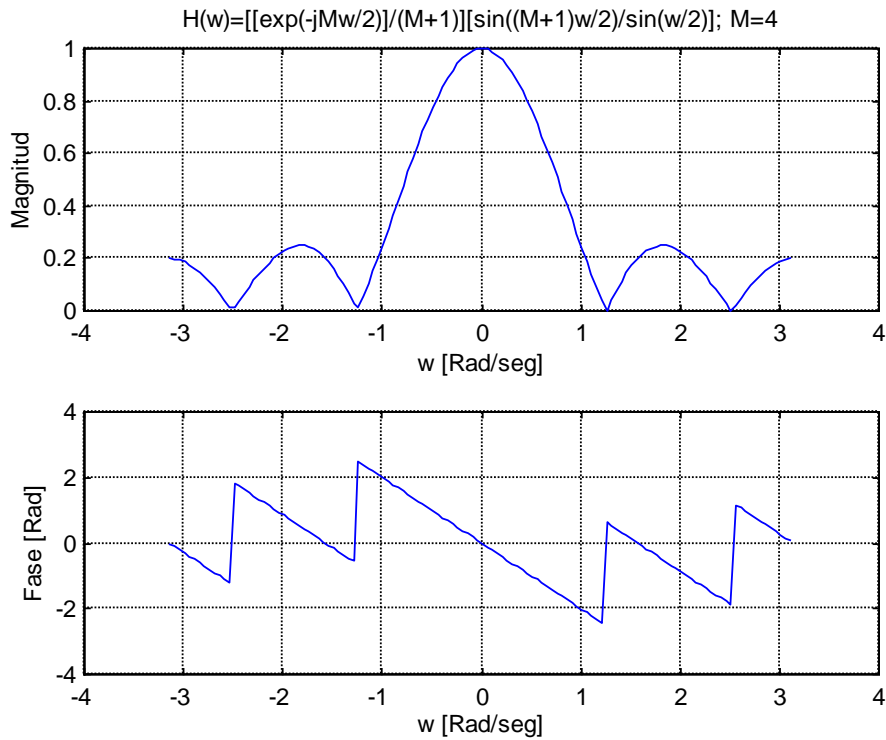


Figura 7.3 Gráficas de la magnitud y la fase de la FT:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-jM\omega/2}}{M+1} \left[\frac{\sin((M+1)\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]$$

En la figura anterior se puede observar que las gráficas corresponden a un filtro pasabajo.

7.2 Propiedades de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

1. Simetría

Existen propiedades de simetría para la *DTFT* aplicables a secuencias complejas y reales. En la Tabla 7.1 se incluyen algunas de las propiedades de simetría para las secuencias reales.

SECUENCIA	TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
Cualquier $x(n)$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
Cualquier $x(n)$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R^*(e^{-j\omega})$
Cualquier $x(n)$ real	$X_I(e^{j\omega}) = X_I^*(e^{-j\omega})$
Cualquier $x(n)$ real	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
Cualquier $x(n)$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

Tabla 7.1 Propiedades de simetría de la *DTFT* para secuencias reales

2. Linealidad

Si $X_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$ son las *FTs* de las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ respectivamente, entonces se cumple la siguiente propiedad de linealidad:

$$FT\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (7.2.1)$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

3. Corrimiento en tiempo y frecuencia

Si $X(e^{j\omega})$ es la *FT* de $x(n)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades de corrimiento:

$$FT\{x(n - n_d)\} = e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}) \quad (\text{corrimiento en tiempo}) \quad (7.2.2)$$

y

$$FT\{e^{j\omega_0 n} x(n)\} = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (\text{corrimiento en frecuencia}) \quad (7.2.3)$$

Prueba:

La ecuación (7.2.2) puede probarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} FT\{x(n - n_d)\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega(m+n_d)}, \\ &= e^{-j\omega n_d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega m}, \end{aligned}$$

y finalmente resulta:

$$FT\{x(n - n_d)\} = e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$$

4. Inversión de tiempo (time reversal)

Si $X(e^{j\omega})$ es la *FT* de la secuencia $x(n)$, entonces, para la secuencia invertida en tiempo, se cumple la siguiente propiedad:

$$FT\{x(-n)\} = X(e^{-j\omega}) \quad (7.2.4)$$

Prueba:

La *FT* de $x(-n)$ está definida como se muestra en la expresión (7.2.5):

$$FT\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\omega n} \quad (7.2.5)$$

Con el cambio de variable $m = -n$, la ecuación (7.2.5) se convierte en:

$$FT\{x(-n)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{j\omega m} = X(e^{-j\omega}) \quad (7.2.6)$$

Nota: Para el caso especial en el cual $x(n)$ es real, (7.2.6) se reduce a:

$$FT\{x(-n)\} = X^*(e^{j\omega}) \quad (7.2.7)$$

5. Diferenciación en frecuencia

Si $X(e^{j\omega})$ es la *FT* de la secuencia $x(n)$, entonces se cumple que:

$$FT\{nx(n)\} = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (7.2.8)$$

Prueba:

Tomando la *FT* de la secuencia $nx(n)$ y manipulando la expresión resultante, se obtiene:

$$FT\{nx(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-j\omega n} = -\frac{1}{j} \frac{d}{d\omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right) = j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (7.2.9)$$

6. Teorema de Convolución

Si $X(e^{j\omega}) = FT\{x(n)\}$ y $H(e^{j\omega}) = FT\{h(n)\}$, y si

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \quad (7.2.10)$$

entonces:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (7.2.11)$$

De (7.2.10) y (7.2.11) se observa que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

7. Teorema de Parseval

Si $X(e^{j\omega}) = FT\{x(n)\}$, entonces se cumple lo siguiente:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (7.2.12)$$

donde E es la energía en la secuencia $x(n)$. La función $|X(e^{j\omega})|^2$ se conoce como el espectro de la *densidad de energía*, puesto que describe como está distribuida la energía con respecto a la frecuencia.

Obsérvese en (7.2.12), que la energía de la secuencia calculada mediante la sumatoria, cuyo subíndice corre de $-\infty$ a ∞ , es igual a la energía de la FT calculada a través de la integral, cuyos límites corren de $-\pi$ a π , debido a que la FT es una función periódica (con período de 2π), y el intervalo de $-\pi$ a π contiene toda la información correspondiente a la secuencia $x(n)$.

8. Teorema de modulación

Si $FT\{x(n)\} = X(e^{j\omega})$ y $FT\{w(n)\} = W(e^{j\omega})$, y si $y(n) = x(n)w(n)$, entonces:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (7.2.13)$$

De (7.2.13) se observa que la multiplicación en el dominio del tiempo es equivalente a la convolución en el dominio de la frecuencia.

7.3 Ejemplos de aplicación de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto y sus propiedades

A continuación se presentan varios problemas resueltos en donde se aplica tanto la *Transformada de Fourier de Tiempo Discreto* como sus propiedades. En la Tabla 7.2 se muestran algunas de las secuencias mas comunes y las *Transformadas de Fourier* respectivas, algunas de la cuales se aplican en los ejemplos propuestos.

SECUENCIA	TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-jn\omega_0}$
1, $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u(n), (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Tabla 7.2 *Transformadas de Fourier de Tiempo Discreto* de las secuencias mas comunes

Ejemplo 7.3.1

La respuesta en frecuencia del sistema LTI mostrado en la Figura 7.4 está dada por la siguiente función:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 0.25e^{-j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}, \quad |\omega| < \pi \quad (7.3.1.1)$$

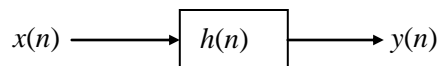


Figura 7.4 Sistema LTI definido por su respuesta al impulso $h(n)$

- (c) Escribir la ecuación de diferencias que caracteriza este sistema.
- (d) Encontrar la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema.

Solución.

- (c) Para obtener la ecuación en diferencias a partir de la FT $H(e^{j\omega})$ de la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema LTI propuesto, se debe manejar la función $H(e^{j\omega})$ como una función de transferencia entre la salida del sistema $Y(e^{j\omega})$ y la señal de entrada $X(e^{j\omega})$, desarrollando dicha relación y posteriormente obteniendo la *Transformada Inversa de Fourier* de la expresión resultante.

Se aplica la propiedad de la FT definida por el *teorema de convolución* en el tiempo, (multiplicación en frecuencia), dada por (7.2.11), obteniendo la siguiente relación:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (7.3.1.2)$$

En la expresión anterior se sustituye $H(e^{j\omega})$ por la función correspondiente que define al sistema LTI (7.3.1.1), resultando:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1 - 0.25e^{-j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$$

Agrupando términos queda:

$$Y(e^{j\omega})(1 - 0.5e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}) - 0.25X(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

Se despeja $Y(e^{j\omega})$ para obtener:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} + X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}X(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

Finalmente, aplicando la *Transformada Inversa de Fourier (IDTFT)* a esta expresión, se obtiene la ecuación en diferencias deseada:

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) - \frac{1}{4}x(n-1)$$

- (d) Para obtener la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema, sólo se debe aplicar la *Transformada Inversa de Fourier* a la expresión $H(e^{j\omega})$ que define al sistema LTI.

La ecuación (7.3.1.1) se puede expresar como se muestra a continuación:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} - \frac{1}{4} \frac{e^{-j\omega}}{(1 - 0.5e^{-j\omega})}$$

Al aplicar la Transformada Inversa de Fourier a la expresión anterior, se obtendrá la respuesta al impulso unitario $h(n)$:

$$h(n) = IFT \left\{ \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} \right\} - \frac{1}{4} IFT \left\{ \frac{e^{-j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}} \right\}$$

Consultando las Tabla 7.2 y aplicando la propiedad de corrimiento, se obtiene finalmente la respuesta deseada:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

A continuación se presentan tres ejemplos en los cuales se obtendrá el contenido frecuencial (espectro) de varias señales, procesadas mediante tres sistemas discretos diferentes: MUESTREADOR, COMPRESOR Y EXPANSOR. En cada uno de ellos se graficarán las secuencias de entrada originales y las señales de salida ya procesadas, así como las transformadas de Fourier respectivas. En dichos ejemplos podrá observarse como se afecta el contenido frecuencial de la señal original de entrada, después de haber sido procesada con cada uno de los sistemas propuestos.

Ejemplo 7.3.2

MUESTREADOR. Para la secuencia $x(n)$ mostrada a continuación:

$$x(n) = \{ \underset{\uparrow}{5} \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}$$

- Graficar la secuencia $x(n)$ y graficar la magnitud de la *Transformada de Fourier* $|X(e^{j\omega})|$.
- Al muestrear la señal $x(n)$ cada dos muestras, se obtiene la secuencia de salida $ys(n)$, como se indica en la Figura 7.5. Graficar esta nueva secuencia $ys(n)$ y graficar la magnitud de su *Transformada de Fourier* $|Ys(e^{j\omega})|$. Comentar las diferencias encontradas entre ambas gráficas de la magnitud de la *FT*.



Figura 7.5 Sistema MUESTREADOR con sus secuencias de entrada $x(n)$ y salida $ys(n)$

Solución.

(a), (b). Las graficas de las secuencias pedidas y la magnitud de las *FTs* correspondientes, se realizaron en MATLAB con el Programa 7.3.2 que se encuentra en el Apéndice A.

Las gráficas correspondientes se presentan en la Figura 7.6.

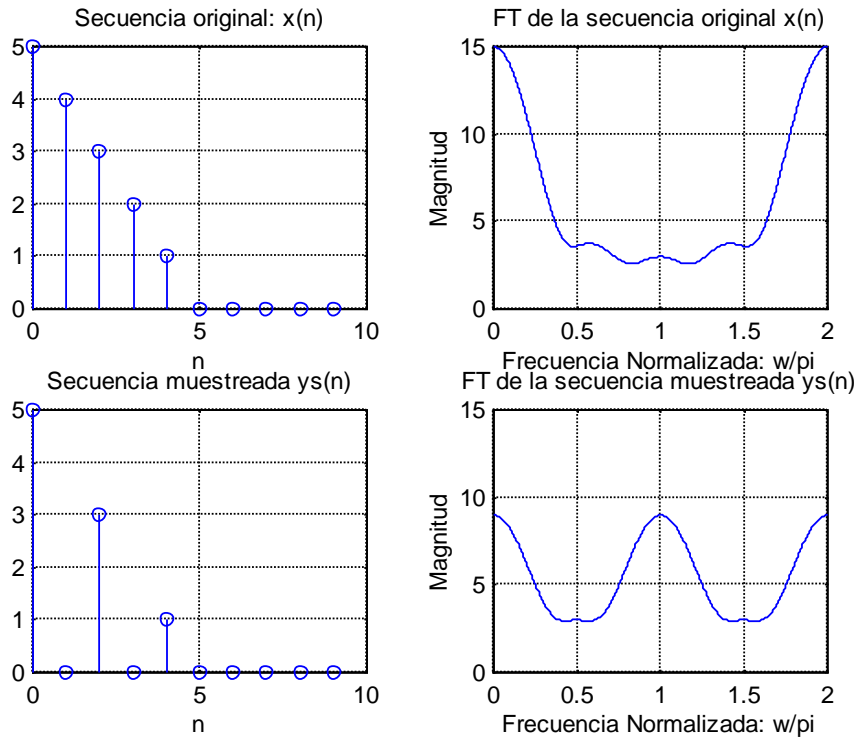


Figura 7.6 Gráficas de las secuencias original $x(n)$ y muestreada $y_s(n)$,

y de las magnitudes de las *FTs* correspondientes.

Observaciones:

Las gráficas correspondientes a las magnitudes de las *FTs* fueron evaluadas en el intervalo de 0 a 2π ($\omega/\pi \in [0, 2]$), y se observa que dichas gráficas son simétricas respecto al valor de π ($\omega/\pi = 1$).

Comparativamente, la gráfica de magnitud de la *FT* correspondiente a la señal muestreada $y_s(n)$, presenta un lóbulo central mayor que la gráfica de la señal original.

Ejemplo 7.3.3

COMPRESOR. Para la secuencia $x(n)$ mostrada a continuación:

$$x(n) = \{ \underset{\uparrow}{5} \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}$$

- Graficar la secuencia $x(n)$ y graficar la magnitud de la *Transformada de Fourier* $|X(e^{j\omega})|$.
- Al comprimir la señal $x(n)$ cada dos muestras, se obtiene la secuencia comprimida $y_d(n)$ como se indica en la Figura 7.7. Graficar esta nueva secuencia $y_d(n)$ y graficar la

magnitud de su *Transformada de Fourier* $|Yd(e^{j\omega})|$.. Comentar las diferencias encontradas entre ambas gráficas de la magnitud de la *FT*.

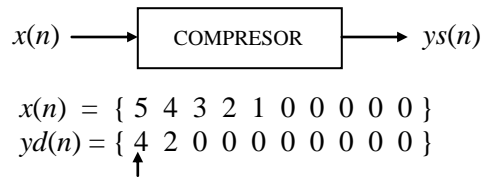


Figura 7.7 Sistema COMPRESOR con sus secuencias de entrada $x(n)$ y salida $y_d(n)$

Solución.

(a), (b). Las gráficas de las secuencias pedidas y la magnitud de las *FTs* correspondientes, se realizaron en MATLAB con el Programa 7.3.3 que se encuentra en el Apéndice A.

Las gráficas correspondientes se presentan en la Figura 7.8.

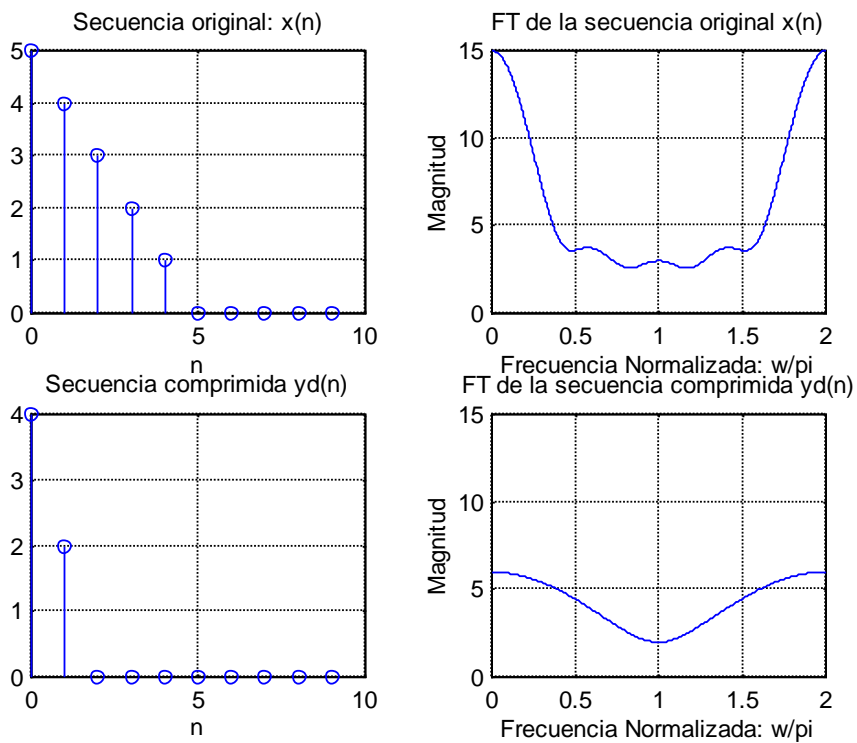


Figura 7.8 Gráficas de las secuencias original $x(n)$ y comprimida $y_d(n)$,

y de las magnitudes de las *FTs* correspondientes.

Observaciones:

Comparativamente, la gráfica de magnitud de la *FT* correspondiente a la señal comprimida $yd(n)$, presenta una menor cantidad de variaciones y éstas, además, son mas suaves que la gráfica de la señal original.

Ejemplo 7.3.4

EXPANSOR. Para la secuencia $x(n)$ mostrada a continuación:

$$x(n) = \{ \underset{\uparrow}{5} \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}$$

- Graficar la secuencia $x(n)$ y graficar la magnitud de la *Transformada de Fourier* $|X(e^{j\omega})|$.
- Al expandir la señal $x(n)$ introduciendo una muestra de valor cero entre cada dos muestras, se obtiene la secuencia expandida $ye(n)$ como se indica en la Figura 7.9. Graficar esta nueva secuencia $ye(n)$ y graficar la magnitud de su Transformada de Fourier, utilizando también un programa en MATLAB. Comentar las diferencias encontradas entre ambas gráficas de la magnitud de la *FT*.

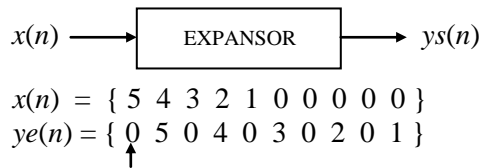


Figura 7.9 Sistema EXPANSOR con sus secuencias de entrada $x(n)$ y salida $ye(n)$

Solución.

(a), (b). Las gráficas de las secuencias pedidas y la magnitud de las *FTs* correspondientes, se realizaron en MATLAB con el Programa 7.3.4 que se encuentra en el Apéndice A.

Las gráficas correspondientes se presentan en la Figura 7.10.

Observaciones:

Comparativamente, la gráfica de magnitud de la *FT* correspondiente a la señal expandida $ye(n)$, presenta una mayor cantidad de variaciones (lóbulos) que la gráfica de la señal original, sin embargo se puede apreciar que la variación de la magnitud de la *FT* de la secuencia expandida $ye(n)$ en el intervalo de 0 a π ($\omega/\pi \in [0, 1]$), es idéntica a la variación de la magnitud de la *FT* de la secuencia original $x(n)$ en el intervalo de 0 a 2π ($\omega/\pi \in [0, 2]$). Lo mismo se puede decir de la variación de la magnitud de la *FT* de la secuencia expandida $ye(n)$ en el intervalo de π a 2π ($\omega/\pi \in [1, 2]$), es decir, la forma de la magnitud de la *FT* de la secuencia original en el intervalo de 0 a 2π , se encuentra reflejada

en los intervalos de 0 a π y de π a 2π en la gráfica de la magnitud de la *FT* de la secuencia expandida.

Comparando las tres gráficas de magnitud de la *FT*, correspondientes a las Figuras 7.6, 7.8 y 7.10, se puede concluir que a medida que la secuencia contiene mas muestras de valor cero entre sus muestras, la magnitud de la *FT* correspondiente presenta mayores variaciones que la secuencia original, la cual no contiene muestras de valor cero entre sus muestras.

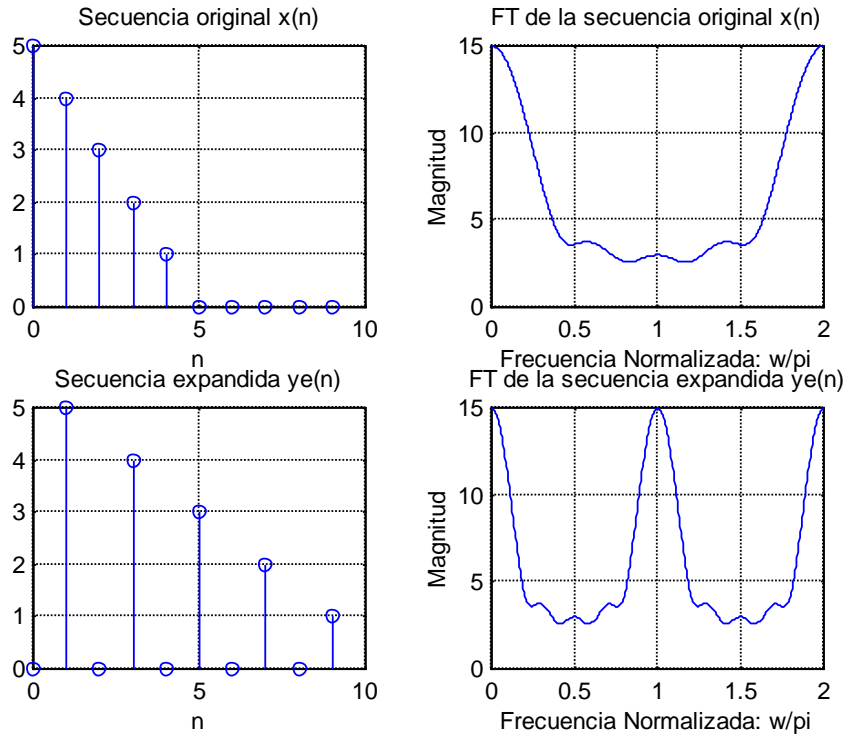


Figura 7.10 Gráficas de las secuencias original $x(n)$ y expandida $ye(n)$,

y de las magnitudes de las *FTs* correspondientes.