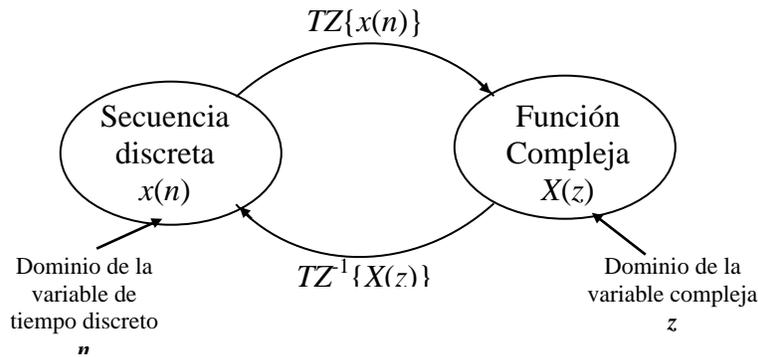


## 9 Transformada Z

La *Transformada Z* es como su nombre lo indica, una transformación matemática de una cierta secuencia existente en el dominio del tiempo discreto  $n$ , en una Función Compleja en el dominio de la variable compleja  $z$ . La *Transformada Z Inversa* permite trasladar los análisis realizados en el dominio de la variable compleja  $z$ , al dominio del tiempo discreto  $n$ , como se muestra gráficamente en la Figura 9.1



**Figura 9.1** Representación de la *Transformada Z* directa e inversa en los dominios de la variable temporal  $n$  y de la variable compleja  $z$

Muchas de las propiedades y comportamientos de las señales o sistemas discretos, se pueden estudiar de una forma más fácil en el dominio de la variable compleja  $z$  (a través de la *Transformada Z* correspondiente), lo cual justifica el empleo de dicha transformada para el estudio de las secuencias discretas. Posteriormente, después de analizar al sistema o a la señal bajo estudio, se puede regresar al dominio del tiempo discreto  $n$ , mediante la *Transformada Z inversa*.

Por ejemplo, para una ecuación en diferencias difícil de resolver en el dominio del tiempo discreto  $n$ , se le puede aplicar la *Transformada Z* y obtener la función de transferencia correspondiente a dicha ecuación. Esta función de transferencia, existente en el dominio de la variable compleja  $z$ , contendrá una cierta cantidad de polos y ceros, cuyas posiciones relativas en el plano  $z$ , permitirán predecir varias de las propiedades y comportamientos que tendrá el sistema en el dominio del tiempo discreto  $n$ . Con lo anterior se hace notar que, en algunos casos, no será necesario resolver la ecuación en diferencias (o función de transferencia), para predecir el comportamiento del sistema.

En este capítulo se presenta la definición y algunas propiedades y aplicaciones de la *Transformada Z* para el estudio de señales y sistemas discretos, y su relación con las *Transformadas de Fourier* y de *Laplace*. Se presentan también aplicaciones de la *Transformada z* para resolver ecuaciones en diferencias, estudiar la estabilidad de sistemas, definir sistemas inversos, y su aplicación en el estudio de la respuesta en frecuencia.

## 9.1 Definición de la Transformada Z

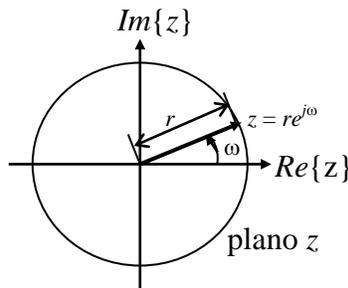
La *Transformada Z (TZ)* de una secuencia  $x(n)$  se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (9.1.1)$$

donde  $z$  es una variable compleja que se puede expresar como:

$$z = re^{j\omega} \quad (9.1.2)$$

donde  $r$  y  $\omega$  son la magnitud y el ángulo de  $z$  respectivamente, como se muestra en la Figura 9.2.



**Figura 9.2** Representación de la variable compleja  $z$  en el plano complejo  $z$

La *Transformada Z* de la secuencia  $x(n)$  definida en (9.1.1), es una función compleja  $X(z)$  de la variable compleja  $z$ , por lo que tanto la función compleja como la variable compleja pueden representarse en coordenadas cartesianas (componentes *real* e *imagiaria*) o coordenadas polares (componentes de *magnitud* y *fase*).

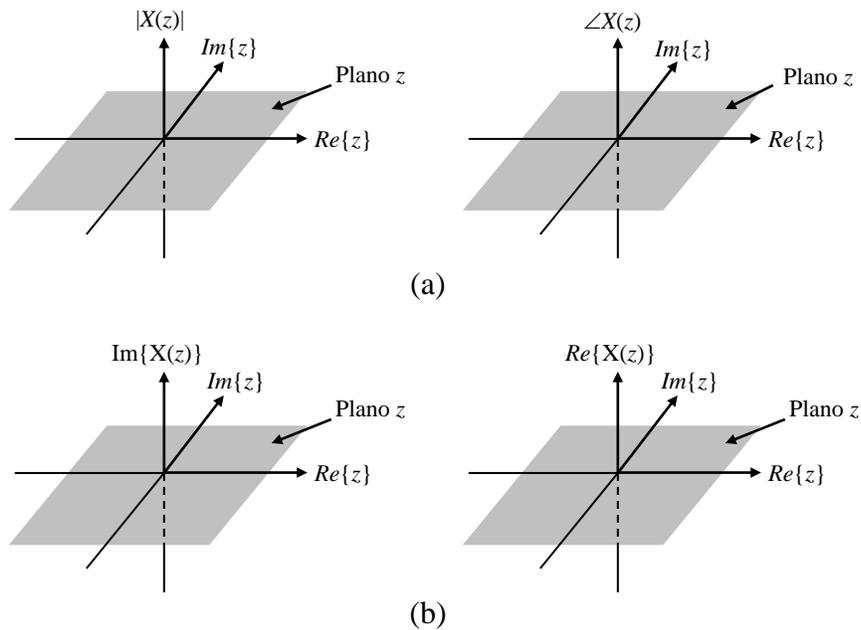
La representación gráfica de la función compleja  $X(z)$  de la variable compleja  $z$  requeriría de un gráfico de cuatro dimensiones, lo cual no es posible, por lo que dicha representación debe hacerse en pares de gráficas complementarias:  $|X(z)|$  vs.  $z$  y  $\angle X(z)$  vs.  $z$  (para coordenadas polares), ó  $Re\{X(z)\}$  vs.  $z$  e  $Im\{X(z)\}$  vs.  $z$  (para coordenadas cartesianas), como se muestra en la Figura 9.3.

Para el caso especial cuando  $r = 1$ , resulta:

$$z = e^{j\omega} \quad (9.1.3)$$

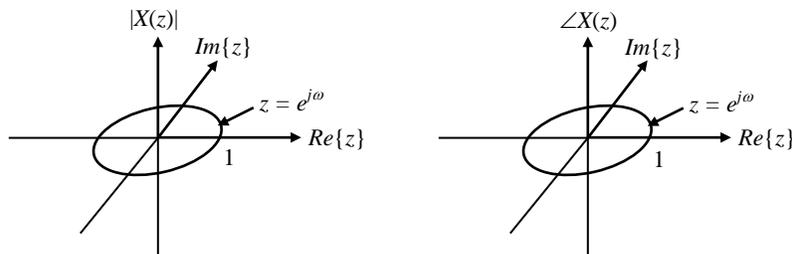
Si se sustituye esta expresión (9.1.3) en la ecuación que define a la *TZ* (9.1.1), se obtiene:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (9.1.4)$$



**Figura 9.3** Representación de los ejes de graficación de la *Transformada Z* para una secuencia  $x(n)$ : (a) en coordenadas polares y (b) en coordenadas cartesianas

que es la *Transformada de Fourier (FT)* de  $x(n)$ , es decir, la *FT* es un caso particular de la *TZ*, donde la *FT* corresponde al valor de la *TZ* evaluada en el círculo unitario ( $z = e^{j\omega}$ ) del plano  $z$ , como se muestra en la Figura 9.4.

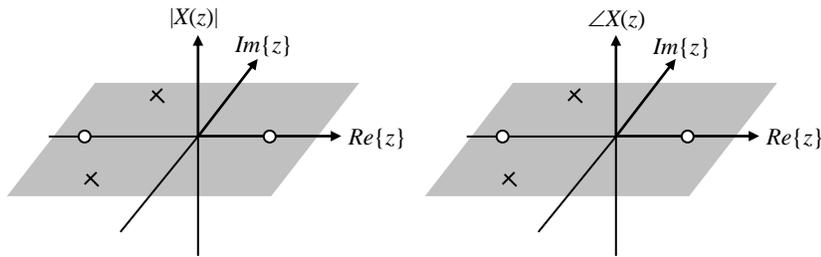


**Figura 9.4** Círculo unitario  $z = e^{j\omega}$  en el plano  $z$  correspondiente al dominio de la *Transformada de Fourier*

Entre las *TZ*'s más importantes y útiles se encuentran las que se pueden expresar como una *función racional* dentro de una cierta *región de convergencia* (ver sección 9.2), es decir:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (9.1.5)$$

En la función racional definida anteriormente, los valores de  $z$  para los que  $X(z) = 0$  son los *ceros* de  $X(z)$ , y los valores de  $z$  para los que  $X(z)$  es infinita, son sus *polos*. Las raíces de  $D(z)$ , correspondientes a valores finitos de  $z$ , serán los *polos* de  $X(z)$ , y de manera análoga, las raíces de  $N(z)$  corresponderán a los *ceros* de  $X(z)$ . Tanto los polos como los ceros se pueden representar gráficamente en el plano  $z$ , mediante los símbolos  $\times$  y  $\circ$ , respectivamente, como se muestra a manera de ejemplo en la Figura 9.5.



**Figura 9.5** Ejemplo de representación de *polos* y *ceros* en el plano  $z$ .

## 9.2 Región de Convergencia (RDC)

Una función biunívoca es aquella en la cual el mapeo a través de dicha función (transformada) es uno a uno, es decir, existe una transformación inversa que permite recuperar la variable independiente. La *TZ* es una función biunívoca, es decir, existe una *Transformada Z inversa* que permite obtener la secuencia original  $x(n)$  a partir de  $X(z)$ , como se puede observar en la Figura 9.1.

Para que la *TZ* de una determinada secuencia exista, la sumatoria que aparece en la definición (9.1.1) debe converger para un conjunto de valores de  $z$ ; a este conjunto de valores se le conoce como *región de convergencia (RDC)*, de aquí que la expresión completa de la *TZ* incluya su *RDC*. En la Figura 9.6 se muestra gráficamente un posible caso de dicha *RDC*.

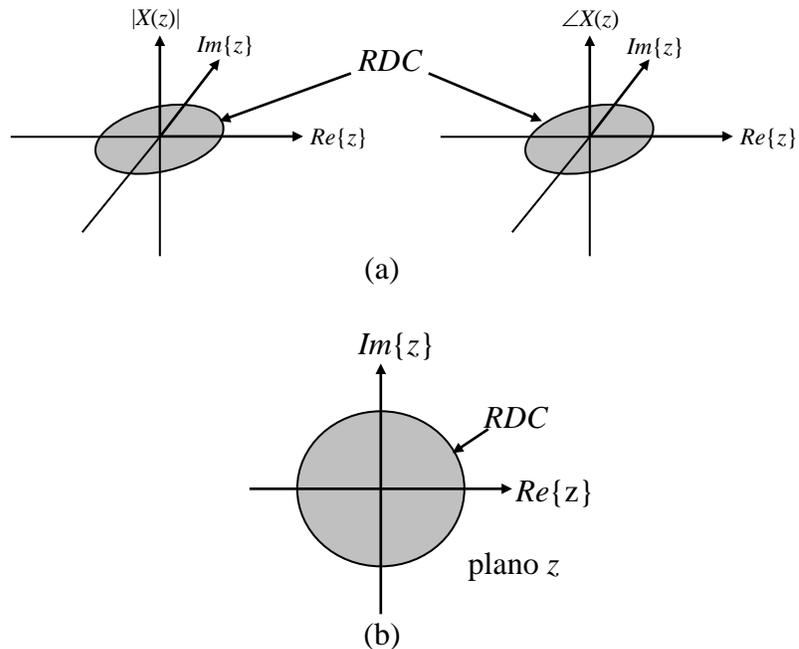
Para el caso de la *Transformada de Fourier*, si la secuencia es absolutamente sumable, la *FT* converge a una función continua de  $\omega$ . En forma análoga la condición para convergencia absoluta de la *TZ* es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \quad (9.2.1)$$

La convergencia de la serie de potencias en (9.1.1) depende solamente de  $z$ , puesto que  $|X(z)| < \infty$  si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \infty \quad (9.2.2)$$

es decir, la *RDC* de (9.1.1) consiste en todos los valores de  $z$  tales que se satisface la desigualdad de (9.2.2).



**Figura 9.6** Ejemplo de un posible conjunto de valores de  $z$  que conforman la *Región de Convergencia (RDC)*. (a) Representación de la *RDC* en un par de gráficas en tres dimensiones; (b) representación de la *RDC* únicamente en el plano  $z$

### 9.2.1 Propiedades de la Región de Convergencia de la TZ

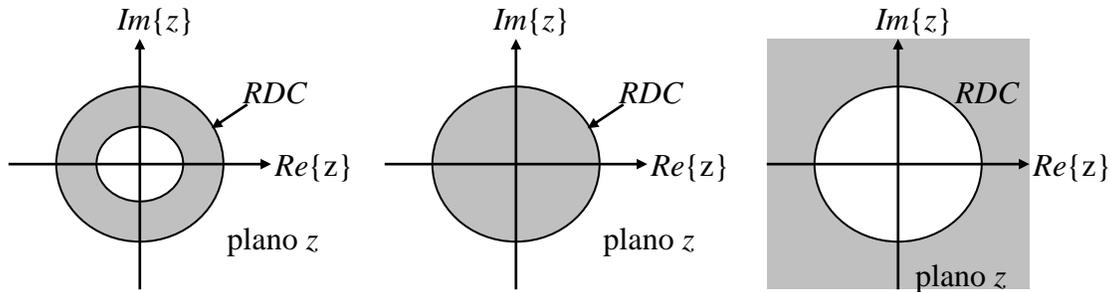
Las propiedades de la *región de convergencia* dependen de la naturaleza de la señal específica. Dado que  $z = re^{j\omega}$ , la convergencia de la TZ depende de que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{-n}| < \infty \quad (9.2.3)$$

es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e^{-j\omega n} r^{-n}| < \infty \quad (9.2.4)$$

de donde se observa que la convergencia solo depende de  $|z|$ , el cual corresponde a un círculo de radio  $r$ . En general, la *RDC* es un anillo centrado en el origen. Este anillo puede extenderse hacia el origen o hacia infinito dependiendo de la naturaleza de la señal, como se indica en la Figura 9.7.

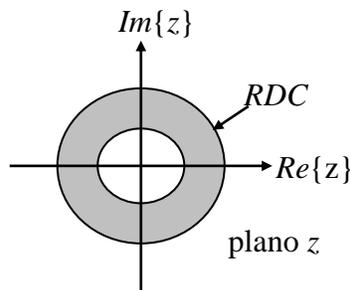


**Figura 9.7** Tres casos diferentes para la *RDC* de la *TZ* de tres secuencias diferentes

A continuación se describen las propiedades de la *RDC*. Se supone que  $X(z)$  es una función racional y que  $x(n)$  tiene amplitud finita, excepto posiblemente en  $n = \infty$  y  $n = -\infty$ .

**1. La *RDC* de  $X(z)$  consiste de un anillo en el plano  $z$  centrado en el origen.**

Esta propiedad se justifica por el hecho de que la *RDC* consiste de los valores de  $z = re^{j\omega}$  para los cuales  $x(n)r^{-n}$  tiene una *Transformada de Fourier* que converge. Por consiguiente, la convergencia depende solo de  $r = |z|$  y no de  $\omega$ . Así que si un valor específico de  $z$  está en la *RDC*, entonces todos los valores de  $z$  de igual magnitud (en el mismo círculo), también estarán en la *RDC*. Esto asegura que la *RDC* consistirá de anillos concéntricos como se muestra en la Figura 9.8.



**Figura 9.8** La *RDC* de  $X(z)$  consiste de un anillo en el plano  $z$  centrado en el origen

**2. La *RDC* no contiene polos.** Esto se debe a que  $X(z)$  en un polo se indetermina y no converge.

**3. Si  $x(n)$  es de duración finita, la *RDC* es todo el plano  $z$ , posiblemente exceptuando  $z = 0$  y  $z = \infty$ .**

Una secuencia de duración finita tiene un número finito de valores diferentes de cero, por lo que la *TZ* consiste de un número finito de términos. Para  $z$  diferente de cero o infinito, cada elemento de la suma será finito y por consiguiente  $X(z)$  convergerá.

### Ejemplo 9.2.1

Obtener la *TZ* y la *RDC* correspondiente para la siguiente secuencia:

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n), & 2 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Solución.**

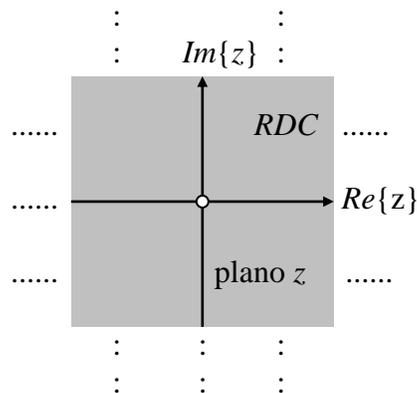
Aplicando la definición de la *TZ* (9.1.1) a la secuencia  $x_1(n)$  propuesta, resulta lo siguiente:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + x(4)z^{-4} + x(5)z^{-5} + x(6)z^{-6}$$

Se observa que  $|X_1(z)| < \infty$  para toda  $z$ , excepto para  $z = 0$ , por lo que la *RDC* de  $X_1(z)$  será:

$$RDC = \{z \neq 0\}$$

En la Figura 9.9 se representa la *RDC* obtenida.



**Figura 9.9** Representación de la *RDC*  $z \neq 0$

### Ejemplo 9.2.2

Obtener la *TZ* y la *RDC* correspondiente para la siguiente secuencia:

$$x_2(n) = \begin{cases} x(n), & -4 \leq n \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Solución.**

La *TZ* de la secuencia  $x_2(n)$  será:

$$X_2(z) = x(-4)z^4 + x(-3)z^3 + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1}$$

lo cual implica que  $|X_2(z)| < \infty$  para  $z \neq 0$  y  $z \neq \infty$ , por lo que su *RDC* es:

$$RDC = \{z \neq 0 \text{ y } z \neq \infty\}$$

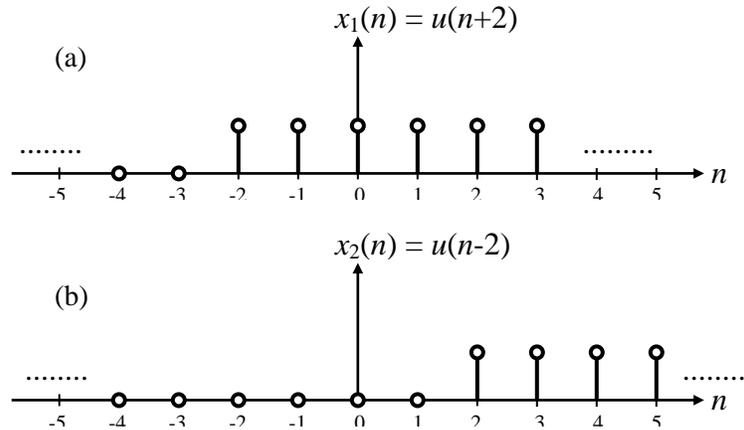
es decir, la *RDC* es todo el plano  $z$  con excepción de esos dos puntos.

**4. Si  $x(n)$  es una secuencia lateral derecha, lo cual significa que  $x(n) = 0$  para  $n < N_1 < \infty$ , entonces la *RDC* de  $X(z)$  se extiende hacia fuera desde el polo finito de  $X(z)$  mas externo (es decir, mayor en magnitud), hacia (y posiblemente incluyendo)  $z = \infty$ .**

En general, para secuencias laterales derechas, la *RDC* no incluye infinito, sin embargo, para secuencias causales ( $N_1 \geq 0$ ) la *RDC* si se extiende hasta infinito.

### Ejemplo 9.2.3

Obtener la *TZ* y la *RDC* correspondiente para las siguientes secuencias mostradas en la Figura 9.10:



**Figura 9.10** Secuencias laterales derechas: (a)  $N_1 = -2$ ; (b)  $N_1 = 2$

### Solución.

(a) La *TZ* de la secuencia mostrada en la Figura 9.10a, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} TZ\{x_1(n)\} &= z^2 + z^1 + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ &= z^3(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \dots) \\ &= z^3(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \dots) - z^3 \\ &= z^3\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) - z^3 = z^3\left(\frac{1-1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) = z^3\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) = z^3\left(\frac{1}{z-1}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$TZ\{x_1(n)\} = \frac{z^3}{z-1}$$

De la expresión anterior y por la propiedad No. 4, se observa que la *RDC* correspondiente es:

$$RDC = \{1 < |z| < \infty\}$$

- (b) La *TZ* de la secuencia mostrada en la Figura 9.10b, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} TZ\{x_2(n)\} &= z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots \\ &= z^{-2}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) \\ &= z^{-2} \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = \frac{1}{z(z-1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$TZ\{x_2(n)\} = \frac{1}{z(z-1)}$$

De la expresión anterior y por la propiedad No. 4, se observa que la *RDC* correspondiente es:

$$RDC = \{|z| > 1\}$$

Obsérvese que esta *RDC* si incluye a  $\infty$ .

**5. Si  $x(n)$  es una secuencia lateral izquierda, es decir que  $x(n) = 0$  para  $n > N_2 > -\infty$ , entonces la *RDC* de  $X(z)$  se extiende hacia adentro a partir del polo de  $X(z)$  diferente de cero mas interno (es decir, de menor magnitud), hacia (y posiblemente incluya)  $z = 0$ .**

En general, para este tipo de secuencias, la *RDC* no incluye  $z = 0$ . Para secuencias anticausales, la *RDC* si incluye  $z = 0$ .

#### Ejemplo 9.2.4

Obtener la *TZ* y la *RDC* correspondiente para la secuencia lateral izquierda siguiente:

$$x(n) = -(1/2)^n u(-n-1) - (1/3)^n u(-n-1)$$

**Solución.**

La TZ de la secuencia  $x(n)$  propuesta está dada por la suma algebraica de las TZ's de cada uno de sus términos, como se indica a continuación:

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

donde las TZ's respectivas se pueden obtener de la Tabla 9.2 (Sección 9.7), teniendo los siguientes resultados:

$$X_1(z) = \frac{z}{z-1/2}, \quad |z| < 1/2$$

y

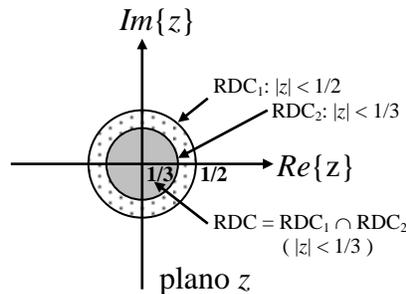
$$X_2(z) = \frac{z}{z-1/3}, \quad |z| < 1/3$$

Evaluando finalmente la expresión correspondiente para  $X(z)$ , resulta:

$$X(z) = \frac{2z(z-5/12)}{(z-1/2)(z-1/3)}$$

cuya RDC es  $|z| < 1/3$ , que es la intersección de las RDC's correspondientes a las TZ's  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ , para el caso de  $N_2 = -1$ .

En la Figura 9.11 se representa la RDC resultante.



**Figura 9.11** La RDC de  $X(z)$  consiste de la intersección de las RDC's correspondientes a  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$

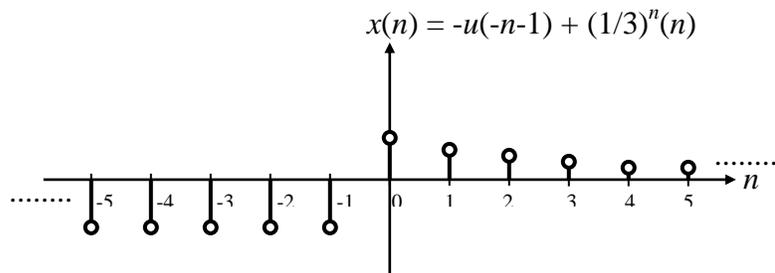
**6. Si  $x(n)$  es una secuencia bilateral, es de duración infinita y no es una secuencia lateral derecha ni izquierda, la RDC para esta señal compuesta incluye la intersección de las RDC's de las componentes laterales izquierda y derecha. Si no hay traslape entre las RDC's, la TZ no existe. Si no hay cancelación de polos y ceros, la RDC es exactamente la intersección de las RDC's individuales.**

La *RDC* es un región anular (anillo, dona) en el plano  $z$  acotada en el exterior y en el interior por polos finitos.

### Ejemplo 9.2.5

Obtener la *TZ* y la *RDC* correspondiente para la secuencia bilateral siguiente y cuya representación gráfica se muestra en la Figura 9.12:

$$x(n) = -u(-n-1) + (1/3)^n u(n)$$



**Figura 9.12** Secuencia bilateral

### Solución.

La *TZ* para la secuencia bilateral  $x(n)$  propuesta está dada por la suma algebraica de las *TZ*'s de cada uno de sus términos, como se indica a continuación:

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

Donde:

$$X_1(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| < 1$$

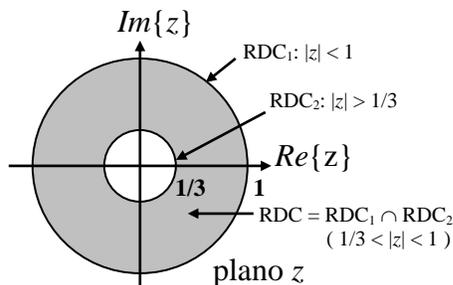
y

$$X_2(z) = \frac{z}{z-1/3}, \quad |z| > 1/3$$

Evaluando finalmente la expresión correspondiente para  $X(z)$ , resulta:

$$X(z) = \frac{2z(z-2/3)}{(z-1)(z-1/3)}$$

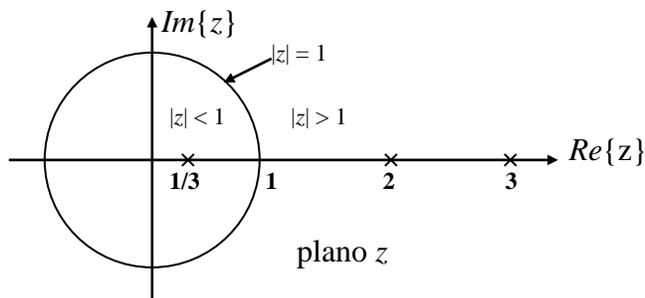
cuya región de convergencia es la región anular  $1/3 < |z| < 1$ , que es la intersección de las *RDC*'s correspondientes a las *TZ*'s  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ , como se muestra en la Figura 9.13



**Figura 9.13** La RDC de  $X(z)$  consiste de la intersección de las RDC's correspondientes a  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$

### Ejemplo 9.2.6

En la Figura 9.14 se muestra el diagrama de polos y ceros correspondiente a la Transformada Z de una cierta secuencia. Analizar dicho diagrama con relación a las posibles regiones de convergencia y las secuencias asociadas a éstas.



**Figura 9.14** Diagrama de polos y ceros correspondiente a la TZ de una cierta secuencia

### Solución.

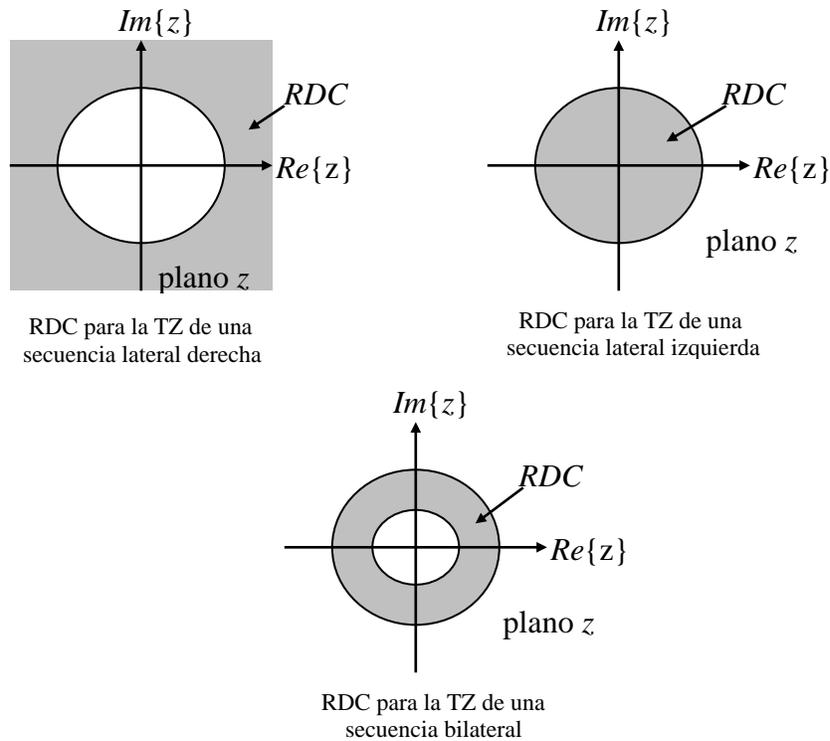
Al analizar el diagrama de polos y ceros de la Figura 9.14, se pueden mencionar los siguientes casos:

1. Si la RDC está dada por  $1/3 < |z| < 2$  se tiene una *secuencia bilateral*, puesto que la RDC es una región anular.
2. Pueden existir dos *secuencias bilaterales*, dependiendo de la RDC. Una dada por  $1/3 < |z| < 2$  y la otra por  $2 < |z| < 3$ .
3. La RDC asociada con una *secuencia lateral izquierda*, se mueve hacia el interior desde el polo más interno, es decir, del polo  $z = 1/3$ , y la RDC está dada por  $|z| < 1/3$ .
4. La RDC asociada con una *secuencia lateral derecha*, se mueve hacia el exterior desde el polo más externo. Puesto que el polo más externo está en  $z = 3$ , la RDC está dada por  $|z| > 3$ .

7. Existe cuando menos un polo en la frontera de la *RDC* de una *TZ*  $X(z)$  racional.

8. La *RDC* es una región continua.

En la Figura 9.15 se muestran las *RDC*'s para secuencias laterales derecha, izquierda y bilateral.



**Figura 9.15** Regiones de convergencia

### 9.3 Algunas propiedades de la Transformada Z

Las propiedades de la *TZ* son muy útiles para analizar señales y sistemas discretos. Se usan frecuentemente en conjunto con las técnicas para evaluar la *Transformada Z inversa*, para resolver problemas más complejos. Se usan también para resolver ecuaciones de diferencias de coeficientes constantes. A continuación se presentan algunas de las propiedades más usadas, sin embargo, no se realiza una demostración formal de cada una de ellas.

#### 1. Linealidad

La *TZ* es una transformada lineal, es decir:

$$X(z) = Z\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (9.3.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Esta propiedad se deduce directamente de la definición de la *TZ*. La *RDC* de  $X(z)$  contiene la intersección de las *RDC*'s de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ . En particular, si no hay cancelación de polos y ceros, entonces la *RDC* de  $X(z)$  es exactamente igual a la intersección de las *RDC*'s de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ . Hay secuencias para las que la *TZ* no existe, puesto que no hay puntos en el plano  $z$  donde la transformada converge, es decir, la *RDC* de la *TZ* es el conjunto nulo.

## 2. Corrimiento en el tiempo

Dada una secuencia  $x(n)$ , una versión desplazada en tiempo de  $x(n)$ , es decir,  $y(n)=x(n-n_0)$ , donde  $n_0$  es un entero, tiene como transformada:

$$Y(z) = TZ\{x(n - n_0)\} = z^{-n_0} X(z) \quad (9.3.2)$$

La región de convergencia está dada por:  $(RDC)_{Y(z)} = (RDC)_{X(z)}$  excepto por la posible adición o supresión de  $z = 0$  o  $z = \infty$ . Esto puede ocurrir debido a que  $z^{-n_0}$  puede cambiar el número de polos en  $z = 0$  o en  $z = \infty$ . Esta propiedad se deduce partiendo de la expresión para la *TZ*:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) z^{-n} \quad (9.3.3)$$

Haciendo el siguiente cambio de variables,  $m = n - n_0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

De donde se puede ver de (9.3.4) que:

$$Y(z) = z^{-n_0} X(z) \quad (9.3.5)$$

Esta propiedad junto con otras propiedades es valiosa para evaluar la *Transformada Z inversa*.

### Ejemplo 9.3.1

Obtener la *Transformada Z inversa* de la expresión dada a continuación:

$$X(z) = \frac{1}{z-1/3}, \quad |z| > 1/3$$

#### Solución.

El cálculo de la *Transformada Z inversa* se puede realizar de dos formas diferentes para este ejemplo, las cuales se presentan a continuación.

1. La primera forma para obtener la *Transformada Z inversa*, consiste en efectuar la división de la expresión propuesta, resultando lo siguiente:

$$X(z) = -3 + \frac{3z}{z-1/3}$$

La transformada *Z inversa* se puede obtener directamente usando la Tabla 9.2 (Sección 9.7):

$$x(n) = -3\delta(n) + 3(1/3)^n u(n)$$

2. La segunda forma consiste en re-escribir la expresión propuesta factorizando  $z^{-1}$ , con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$X(z) = z^{-1} \left( \frac{z}{z-1/3} \right)$$

Aplicando la propiedad de corrimiento en tiempo a la expresión resultante, se obtiene el resultado final:

$$x(n) = (1/3)^{n-1} u(n-1)$$

Se puede demostrar que las expresiones finales para  $x(n)$  obtenidas en cada procedimiento son equivalentes.

### 3. Multiplicación por una secuencia exponencial

Dada una secuencia  $x(n)$  con *TZ*  $X(z)$ , si se multiplica por una secuencia exponencial, y se forma la secuencia  $y(n) = z_0^n x(n)$ , entonces su transformada está dada por:

$$Y(z) = TZ\{z_0^n x(n)\} = X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (RDC)_{Y(z)} = |z_0|(RDC)_{X(z)} \quad (9.3.6)$$

La notación  $|z_0|(RDC)_{X(z)}$  significa que la *RDC* de  $X(z)$  se escala por  $|z_0|$ . Esta propiedad se puede deducir directamente de la definición de la *TZ* dada en (9.1.1), es decir:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x(n) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left( \frac{z}{z_0} \right)^{-n} \\
 Y(z) &= X\left( \frac{z}{z_0} \right) \tag{9.3.7}
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 9.3.2

Obtener la *Transformada Z* de la secuencia  $x(n) = a^n u(n)$  con  $0 < a < 1$ .

**Solución.**

Se sabe que la *TZ* de la secuencia  $x(n) = u(n)$  está dada por:

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

Si ahora se forma la secuencia propuesta  $x(n) = a^n u(n)$ ,  $0 < a < 1$ , se obtiene finalmente:

$$Y(z) = X(z/a) = \frac{z/a}{z/a-1} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > 1$$

### Ejemplo 9.3.3

Obtener la *Transformada Z* de la secuencia  $y(n) = (re^{j\omega_0})^n u(n)$ .

**Solución.**

Como la *TZ* de la secuencia  $u(n)$  es:

$$U(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

entonces se aplica directamente la propiedad de multiplicación por una secuencia exponencial, obteniendo el siguiente resultado final:

$$Y(z) = \frac{z}{z - re^{j\omega_0}} = \frac{1}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}}$$

#### 4. Convolución de secuencias

Dadas las secuencias  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ , con *TZ's*  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ , su convolución en el tiempo es equivalente a una multiplicación en el dominio de la *TZ*, es decir:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow Y(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (9.3.8)$$

donde la *RDC* de  $Y(z)$  contiene la intersección de las *RDC's* de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ .

Esta propiedad se puede deducir a partir de las definiciones de convolución y de *Transformada Z*, esto es:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \quad (9.3.9)$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \quad (9.3.10)$$

Sustituyendo (9.3.9) en (9.3.10) resulta:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right\} z^{-n} \quad (9.3.11)$$

Intercambiando el orden de las sumas queda:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n} \quad (9.3.12)$$

Cambiando ahora el índice de la segunda sumatoria, de  $n$  a  $m = n - k$ , resulta:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)z^{-m} \right\} z^{-k} \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)z^{-m} \right) \\ &= X_1(z)X_2(z) \end{aligned} \quad (9.3.13)$$

Entonces, para valores de  $z$  que están dentro de las *RDC's* de  $X_1(z)$  y de  $X_2(z)$ , se obtiene la propiedad buscada, es decir:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow Y(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (9.3.15)$$

Basándose en esta propiedad se puede afirmar que la *TZ* de la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo es el producto de la *TZ* de la entrada y la *TZ* de la respuesta al impulso del sistema.

#### Ejemplo 9.3.4

Obtener la convolución de las secuencias dadas a continuación:

$$y(n) = u(n) * (0.5)^n u(n)$$

**Solución.**

La propiedad dice que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la *TZ*, por consiguiente:

$$Y(z) = \left( \frac{z}{z-1} \right) \left( \frac{z}{z-0.5} \right) = \left( \frac{1}{1-z^{-1}} \right) \left( \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \right)$$

Usando fracciones parciales en la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$

donde:  $A = 2$  y  $B = -1$ ; y de la Tabla 9.2 (Sección 9.7) se puede obtener  $y(n)$  como:

$$y(n) = 2u(n) - (0.5)^n u(n)$$

#### Ejemplo 9.3.5

Obtener la convolución siguiente:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

donde:

$$x(-1) = x(1) = 1, \quad x(0) = -1, \quad \text{y} \quad h(0) = 1, \quad h(1) = 2, \quad h(2) = 3$$

**Solución.**

Como la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la *TZ*, se aplica esta propiedad a la *TZ* de cada una de las secuencias propuestas, resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= X(z)H(z) \\
 &= (z - 1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}) \\
 &= z + 1 + 2z^{-1} - z^{-2} + 3z^{-3}
 \end{aligned}$$

y al obtener la *TZ* inversa resulta:

$$y(n) = \{1, 1, 2, -1, 3\},$$

↑

que se puede re-escribir como:

$$y(-1) = 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = -1, \quad y(3) = 3$$

### 5. Teorema del valor inicial

Si  $x(n) = 0$  para  $n < 0$ , es decir., si  $x(n)$  es una secuencia causal, entonces,

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \tag{9.3.16}$$

Esta propiedad se puede deducir partiendo de la definición de la *TZ*, y considerando el límite para cada uno de los términos de la serie, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\
 &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots
 \end{aligned} \tag{9.3.17}$$

En (9.3.17), cuando  $z \rightarrow \infty$  todos los términos desaparecen excepto  $x(0)$ .

### 6. Secuencias estables

Una secuencia  $x(n)$  es estable, si es absolutamente sumable, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{9.3.18}$$

En el dominio de la *TZ*, se puede demostrar que una secuencia es estable si la *RDC* de su *TZ* incluye el círculo unitario.

### 7. Relación con la Transformada de Fourier (TF)

La *TF* está contenida en la *TZ*, puesto que

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \tag{9.3.19}$$

En otras palabras, la *FT* es igual a la *TZ* evaluada en el círculo unitario  $z = e^{j\omega}$ . Si la *TZ* de una secuencia incluye el círculo unitario, la *FT* de la secuencia existe.

### Ejemplo 9.3.6

Para la suma de secuencias mostrada a continuación:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) = (1/2)^n u(n) + (-1/3)^n u(n)$$

- (c) Indicar si existe la *Transformada de Fourier* de  $x(n)$ .  
 (d) En caso de existir la *FT* de  $x(n)$ , graficar los espectros de magnitud y fase respectivos.

#### Solución.

- (a) Para saber si la secuencia propuesta  $x(n)$  tiene *Transformada de Fourier*, es necesario conocer si la *RDC* de la *TZ* respectiva incluye el círculo unitario. Para ello se obtiene primero la *TZ* de la secuencia:

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \frac{z}{z-1/2} + \frac{z}{z+1/3}$$

donde la *RDC* de la *TZ* resultante está dada por:

$$(RDC)_{X(z)} = \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| > 1/3\} = |z| > 1/2$$

Puesto que  $|z| > 1/2$ , el círculo unitario está incluido en la *RDC*, lo que implica que la *FT* de  $x(n)$  existe.

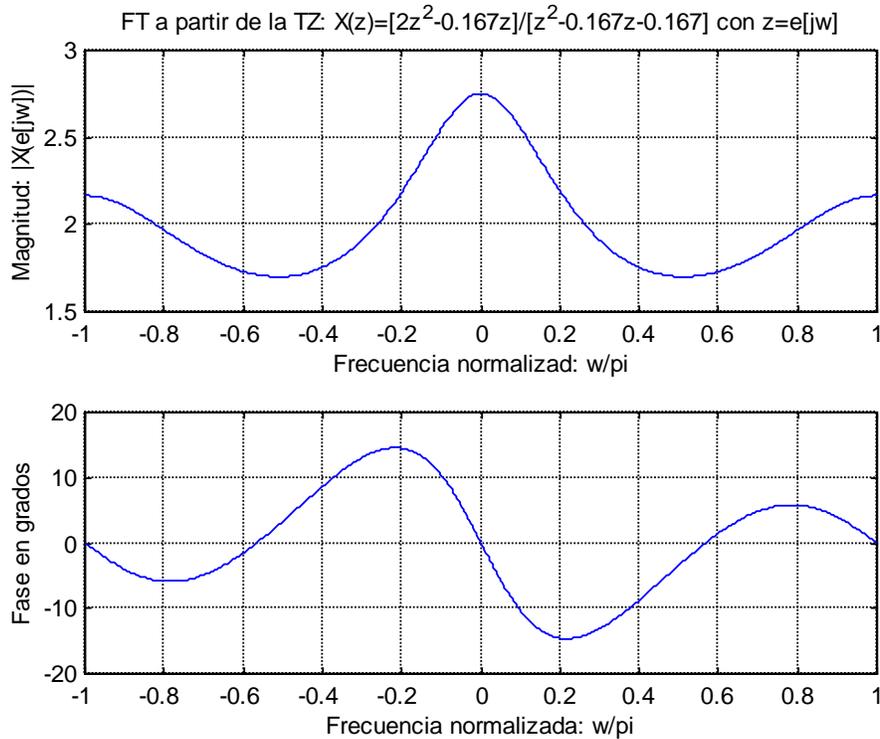
- (b) Se puede obtener la *FT* deseada directamente de la *TZ*. Sumando  $X(z)$  resulta:

$$X(z) = \frac{2z(z-1/12)}{(z-1/2)(z+1/3)}$$

Re-escribiendo  $X(z)$  como:

$$X(z) = \frac{2z^2 - 0.167z}{z^2 - 0.167z - 0.167}$$

Las gráficas de los espectros de magnitud y fase de la *FT* correspondiente, se realizaron en MATLAB con el Programa 9.3.6 que se encuentra en el Apéndice A. En la Figura 9.16 se muestran los resultados obtenidos.



**Figura 9.16** Espectros de magnitud y fase de la *TF* de la secuencia  $x(n) = x_1(n) + x_2(n) = (1/2)^n u(n) + (-1/3)^n u(n)$

## 9.4 Solución de ecuaciones en diferencias mediante la Transformada Z

Una aplicación importante de la *Transformada Z* consiste en la solución de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes.

La forma general de la ecuación lineal de diferencias de coeficientes constantes de orden  $N$ , para la cual se puede aplicar el método de solución mediante la *Transformada Z*, se muestra a continuación:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \quad (9.4.1)$$

La expresión (9.4.1) está constituida por factores de la forma  $y(n-k)$  y  $x(n-m)$ , donde  $k$  y  $m$  son fijos y  $n \geq 0$ . El método de solución se basa en el desarrollo de una expresión para la *TZ* de secuencias de la forma  $y(n-k)$  y  $x(n-m)$ . Si se inicia con el caso en que  $m = 1$ , para la secuencia  $x(n-m)$ , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Z\{x(n-1)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} \\
&= x(-1) + x(0)z^{-1} + x(1)z^{-2} + x(2)z^{-3} + \dots \\
&= x(-1) + z^{-1}[x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots]
\end{aligned} \tag{9.4.2}$$

de donde se puede ver que

$$Z\{x(n-1)\} = z^{-1}X(z) + x(-1) \tag{9.4.3}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtienen los siguientes resultados, para  $m = 2$  y  $m = 3$ :

$$Z\{x(n-2)\} = z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2) \tag{9.4.4}$$

$$Z\{x(n-3)\} = z^{-3}X(z) + z^{-2}x(-1) + z^{-1}x(-2) + x(-3) \tag{9.4.5}$$

Por inducción se puede llegar al resultado general:

$$\begin{aligned}
Z\{x(n-m)\} &= z^{-m} \left\{ X(z) + \sum_{r=1}^m x(-r)z^r \right\} \\
&y \\
Z\{y(n-k)\} &= z^{-k} \left\{ Y(z) + \sum_{r=1}^k y(-r)z^r \right\}
\end{aligned} \tag{9.4.6}$$

para  $m$  y  $k$  específicas y  $n \geq 0$ .

#### Ejemplo 9.4.1

Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) - (1/2)y(n-1) = x(n) - (1/2)x(n-1)$$

donde:

$$x(n) = u(n), \quad y \quad y(-1) = 1$$

#### Solución.

Para resolver la ecuación en diferencias, es decir, para encontrar la secuencia  $y(n)$  cuando a la ecuación en diferencias se le aplica una secuencia  $x(n) = u(n)$ , se aplica la *Transformada Z* a ambos lados de la ecuación propuesta, resultando lo siguiente:

$$Y(z) - (1/2)\{z^{-1}Y(z) + y(-1)\} = \frac{z}{z-1} - (1/2)\left(z^{-1} \frac{z}{z-1}\right)$$

Simplificando el resultado anterior queda:

$$Y(z) = \frac{z(3z-2)}{(2z-1)(z-1)}$$

Expandiendo esta expresión en fracciones parciales, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{3z-2}{(2z-1)(z-1)} \\ &= \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z-1} \end{aligned}$$

donde  $A = 1$ , y  $B = 1$ ; por consiguiente:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{2z-1} + \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z}{2(z-1/2)} + \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

De la Tabla 9.2 (Sección 9.7) se puede obtener la *Transformada Z inversa* de esta expresión, resultando finalmente:

$$\begin{aligned} y(n) &= 0.5(1/2)^n u(n) + u(n) \\ &= [1 + 0.5(1/2)^n] u(n) \end{aligned}$$

## 9.5 Propiedades de mapeo de la transformación $z = e^{sT}$

En esta sección se presenta un estudio de las relaciones existentes entre la variable compleja  $s$  de la *Transformada de Laplace* y la variable compleja  $z$  de la *Transformada Z*, y como añadidura se estudiará también la relación de las variables anteriores con la variable compleja  $e^{j\omega}$  de la *Transformada de Fourier*.

Cuando se muestrea una señal continua  $x_c(t)$  con un período  $T$ , la señal muestreada correspondiente es:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t-nT) \quad (9.5.1)$$

Suponiendo, por conveniencia, que  $x_c(t)$  es causal, (9.5.1) se convierte en:

$$x_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) \quad (9.5.2)$$

Al desarrollar (9.5.2) resulta:

$$x_s(t) = x_c(t)\delta(t) + x_c(t)\delta(t-T) + x_c(t)\delta(t-2T) + \dots \quad (9.5.3)$$

La *Transformada de Laplace* de (9.5.3) está dada por:

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} [x_c(t)\delta(t) + x_c(t)\delta(t-T) + x_c(t)\delta(t-2T) + \dots] e^{-sT} dt \quad (9.5.4)$$

Integrando (9.5.4) resulta:

$$X_s(s) = x_c(0) + x_c(T)e^{-Ts} + x_c(2T)e^{-2Ts} + \dots \quad (9.5.5)$$

Se puede ver que (9.5.5) puede re-escribirse como:

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_c(nT)e^{-nTs} \quad (9.5.6)$$

que es la *Transformada de Laplace (TL)* de la señal muestreada. Ahora, dada la secuencia de números  $x_c(nT)$ ,  $n \geq 0$ , su *Transformada Z* se puede escribir como:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_c(nT)z^{-n} \quad (9.5.7)$$

Comparando (9.5.6) y (9.5.7), se obtiene la relación entre las variables complejas  $s$  y  $z$ :

$$z = e^{sT} \quad (9.5.8)$$

o

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) \quad (9.5.9)$$

De (9.5.8) y (9.5.9) se puede ver que:

$$z = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \quad (9.5.10)$$

Si  $z$  se expresa como:

$$z = |z| e^{j\omega} \quad (9.5.11)$$

entonces de (9.5.10) y (9.5.11) se obtiene:

$$|z| = e^{\sigma T} \quad (9.5.12)$$

y

$$\omega = \Omega T = 2\pi \left( \frac{\Omega}{\Omega_s} \right) \quad (9.5.13)$$

puesto que  $T = 2\pi/\Omega_s$ .

A continuación se analizan tres casos de las ecuaciones (9.5.10), (9.5.11), (9.5.12) y (9.5.13), con relación al valor de la componente real  $\sigma$  (de la variable compleja  $s$ )

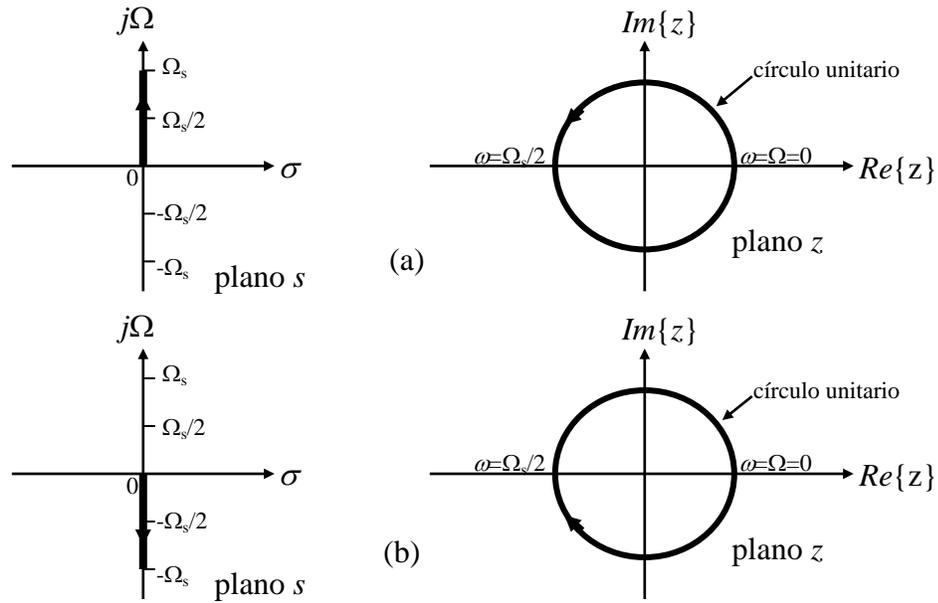
### 1. $\sigma = 0$

De las ecuaciones (9.5.12) y (9.5.13) se obtiene la Tabla 9.1.

$\Omega$	$ z $	$\omega$
0	1	0
$\Omega_s/4$	1	$\pi/2$
$\Omega_s/2$	1	$\pi$
$3\Omega_s/4$	1	$3\pi/2$
$\Omega_s$	1	$2\pi$

**Tabla 9.1**

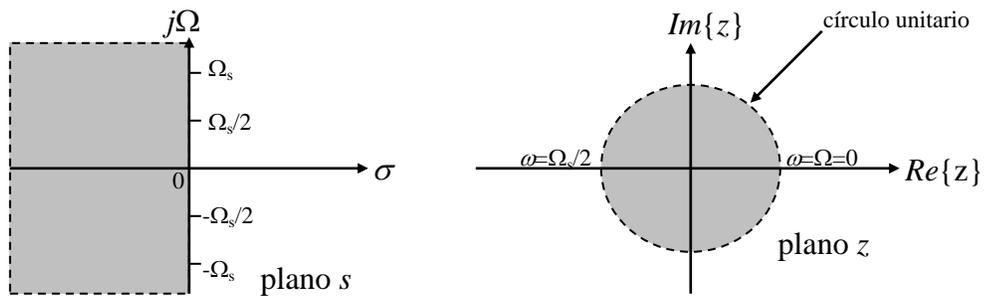
De la Tabla 9.1 se puede ver que la porción del eje  $j\Omega$  entre  $\Omega = 0$  y  $\Omega = \Omega_s$  en el plano  $s$  se mapea al círculo unitario en el plano  $z$  en dirección contraria a las manecillas del reloj, como se muestra en la Figura 9.17. Si  $\Omega$  aumenta desde  $\Omega_s$  a  $2\Omega_s$  se le da otra vuelta al círculo unitario. De aquí se concluye que si  $\Omega$  varía de 0 a  $\infty$ , corresponde a un número infinito de vueltas al círculo unitario en dirección contraria a las manecillas del reloj. Lo inverso ocurre si  $\Omega$  varía de 0 a  $-\infty$ . Por lo anterior, este mapeo no es uno-a-uno, ya que hay más de un punto en el eje  $j\Omega$  que se mapea a un solo punto en el círculo unitario



**Figura 9.17** Mapeo del eje  $j\Omega$  del plano  $s$  al círculo unitario  $e^{j\omega}$  del plano  $z$ :  
 (a)  $\Omega$  varía de 0 a  $\Omega_s$  y (b)  $\Omega$  varía de 0 a  $-\Omega_s$

### 2. $\sigma < 0$

Este caso corresponde a los puntos de la mitad izquierda, respecto al eje  $j\Omega$ , del plano  $s$ , e implica que  $|z| < 1$ . Por consiguiente, la mitad izquierda del plano  $s$  se mapea al interior del círculo unitario en el plano  $z$ , como se muestra en la Figura 9.18. El mapeo ocurre en forma de círculos concéntricos en el plano  $z$  cuando  $\sigma$  varía de 0 a  $-\infty$ .

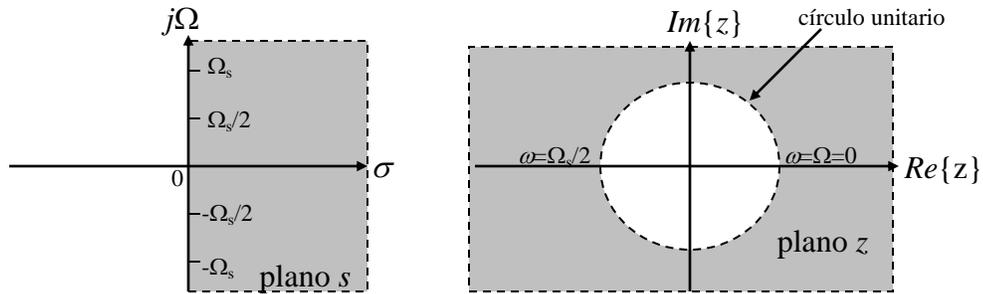


**Figura 9.18** Mapeo del semi-plano izquierdo de  $s$  al interior del círculo unitario en el plano  $z$

### 3. $\sigma > 0$

Este caso corresponde a los puntos de la mitad derecha, respecto al eje  $j\Omega$ , del plano  $s$ , e implica que  $|z| > 1$ . Por consiguiente, la mitad derecha del plano  $s$  se

mapea fuera del círculo unitario en el plano  $z$ , como se muestra en la Figura 9.19. El mapeo ocurre en forma de círculos concéntricos en el plano  $z$  cuando  $\sigma$  varía de  $0^+$  a  $+\infty$ .



**Figura 9.19** Mapeo del semi-plano derecho de  $s$  al exterior del círculo unitario en el plano  $z$

Se puede demostrar que estas propiedades de mapeo son también válidas para señales no causales.

## 9.6 Análisis de sistemas LTI en el dominio de la Transformada Z

Los dominios de las transformadas proporcionan información adicional sobre los sistemas, y facilitan su diseño e implementación en aplicaciones específicas.

### 9.6.1 Respuesta en Frecuencia

La respuesta en frecuencia  $H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$  se definió anteriormente como la ganancia compleja (eigenvalor) que el sistema aplica a la entrada exponencial compleja  $e^{j\omega n}$  (eigenfunción). Además la relación entre la entrada y salida está dada por:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (9.6.1)$$

donde

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|/|X(e^{j\omega})| \quad (9.6.2)$$

y

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \quad (9.6.3)$$

$|H(e^{j\omega})|$  se conoce como respuesta de magnitud o ganancia, y  $\angle H(e^{j\omega})$  como respuesta de fase del sistema. Ambas, magnitud y fase son funciones reales de  $\omega$ , mientras que la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  es una función compleja de  $\omega$ .

En algunos casos, la magnitud se expresa en decibeles,

$$\zeta(\omega) = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| \quad dB \quad (9.6.4)$$

donde  $\zeta(\omega)$  se conoce como función de ganancia.

Si la respuesta al impulso del sistema es real, la magnitud es una función par de  $\omega$ , es decir:

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \quad (9.6.5)$$

y la fase es una función impar de  $\omega$ , es decir:

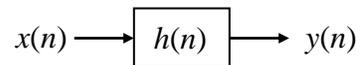
$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega) \quad (9.6.6)$$

De igual manera,  $Re\{H(e^{j\omega})\}$  es par e  $Im\{H(e^{j\omega})\}$  es impar

### Ejemplo 9.6.1

Obtener la respuesta en frecuencia del filtro de promedio móvil representado en la Figura 9.20 y descrito por la siguiente secuencia:

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)$$



**Figura 9.20** Representación del filtro de promedio móvil con respuesta al impulso unitario  $h(n)$ .

Graficar la magnitud y la fase en función de la frecuencia.

### Solución.

Para obtener la respuesta en frecuencia del filtro propuesto, es necesario calcular la *Transformada Z*  $H(z)$  de la respuesta al impulso  $h(n)$  del mismo. Evaluando posteriormente dicha transformada en  $z = e^{j\omega}$  se obtendrá la respuesta en frecuencia pedida.

La *Transformada Z* de la respuesta al impulso del filtro se obtendrá de dos formas diferentes, con el fin de mostrar que el método de solución del problema no es único.

- (c) Una primera forma consiste en comparar la secuencia del filtro de promedio móvil con la ecuación que define la suma de convolución para un sistema discreto en general:

$$y(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)x(n-k)$$

Se observa que la respuesta al impulso del filtro está dada por:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M} & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la definición de la *Transformada Z*:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

la *Transformada Z* de la respuesta al impulso del filtro será:

$$H(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k}$$

- (d) Una segunda forma de obtener la *Transformada Z* de la respuesta al impulso del filtro, consiste en obtener directamente la *Transformada Z* de la secuencia propuesta que define al filtro, es decir:

$$TZ\{y(n)\} = TZ\left\{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)\right\}$$

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z)z^{-k} = \frac{X(z)}{M} \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k}$$

De la expresión anterior se puede obtener la función de transferencia  $Y(z)/X(z)$ , la cual corresponderá precisamente a la *Transformada Z* de la respuesta al impulso  $h(n)$  del filtro de promedio móvil, esto es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k}$$

Obsérvese que los resultados obtenidos mediante las dos formas descritas son los mismos.

Como se mostró anteriormente, la expresión obtenida para la *Transformada Z* de la

respuesta al impulso  $h(n)$  del filtro, representa además, la función de transferencia  $H(z) = Y(z)/X(z)$  del sistema.

Ahora, para obtener la respuesta en frecuencia a partir de la *Transformada Z* de la respuesta al impulso del filtro, se evalúa ésta en  $z = e^{j\omega}$ , obteniéndose:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n}$$

Al desarrollar esta expresión, resulta:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} - \sum_{n=M}^{\infty} e^{-j\omega n} \right) \\ &= \frac{1}{M} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} \right) (1 - e^{-jM\omega}) = \frac{1}{M} \frac{1 - e^{-jM\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Finalmente resulta:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(M-1)\omega/2}$$

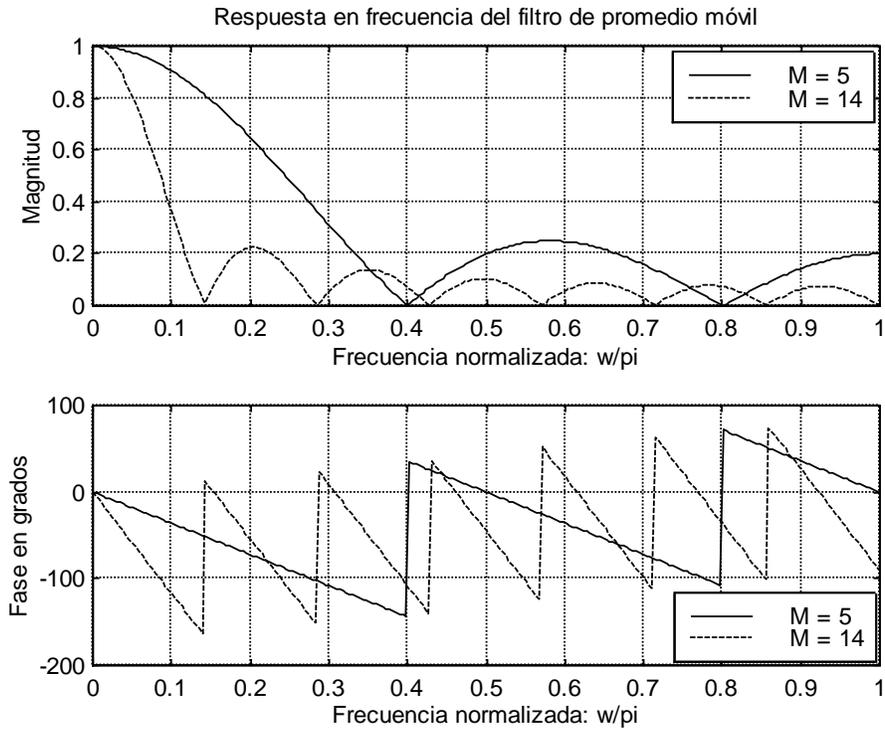
De esta última ecuación se puede obtener la magnitud y la fase:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M} \frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

$$\theta(\omega) = -\frac{(M-1)\omega}{2} + \pi \sum_{k=0}^{M/2} \mu \left( \omega - \frac{2\pi k}{M} \right)$$

donde  $\mu(\omega)$  es una función escalón de  $\omega$ .

Las gráficas de las respuestas de magnitud y fase de los filtros de promedio móvil para  $M = 5$  y  $M = 14$ , se realizaron en MATLAB con el Programa 9.6.1 que se encuentra en el Apéndice A, y en la Figura 9.21 se muestran dichas gráficas.



**Figura 9.21** Respuesta de magnitud y fase de los filtros de promedio móvil de longitud  $M = 5$  y  $M = 14$ .

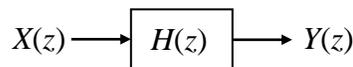
*Observaciones:*

En el rango de  $\omega = 0$  a  $\omega = \pi$ , la magnitud tiene un máximo igual a 1 en  $\omega = 0$ , y tiene ceros en  $\omega = 2\pi k/M$  con  $k = 1, 2, \dots, (M/2)$ . La fase exhibe discontinuidades de  $\pi$  ( $180^\circ$ ) en cada cero de  $H(e^{j\omega})$  y es lineal en otras partes con pendiente  $-(M-1)/2$ . Tanto la magnitud como la fase son periódicas con período  $2\pi$ .

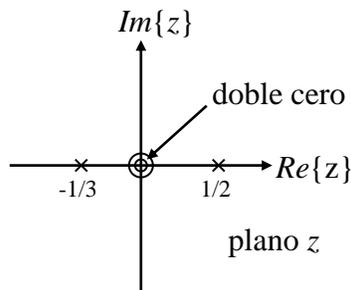
### Ejemplo 9.6.2

La función de transferencia  $H(z)$  de un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo, representado en la Figura 9.22, tiene una configuración de polos y ceros como se indica en la Figura 9.23, y su expresión está dada por la siguiente ecuación:

$$H(z) = \frac{6z^2}{(z-1/2)(z+1/3)} \quad |z| > 1/2$$



**Figura 9.22** Representación de un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo, con función de transferencia  $H(z)$ .



**Figura 9.23** Configuración de polos y ceros del sistema propuesto con función de transferencia  $H(z)$ .

- (e) Determinar la respuesta al impulso  $h(n)$  del sistema.  
 (f) Determinar la respuesta del sistema cuando la entrada está dada por:

$$x(n) = u(n) - \frac{1}{2}u(n-1)$$

- (g) Obtener la respuesta del sistema en estado estacionario cuando la entrada es la secuencia  $x(n)$ , obtenida del muestreo de la señal de tiempo continuo siguiente:

$$x(t) = 50 + 10\cos(20\pi t) + 30\cos(40\pi t)$$

a una frecuencia de muestreo  $\Omega_s = 2\pi(40)$  radianes/seg.

**Solución.**

- (a) La respuesta al impulso  $h(n)$  del sistema es simplemente la *Transformada Z inversa* de la función de transferencia propuesta  $H(z)$ . Mediante la expansión en fracciones parciales de dicha función de transferencia, se obtiene

$$H(z) = \frac{18}{15} \frac{z}{(z-1/2)} + \frac{12}{5} \frac{z}{(z+1/3)}$$

De la Tabla 9.2 (Sección 9.7) y por el hecho de que la *RDC* propuesta corresponde a una secuencia lateral derecha, resulta finalmente:

$$h(n) = \frac{18}{15}(1/2)^n u(n) + \frac{12}{5}(-1/3)^n u(n)$$

- (b) La respuesta del sistema a la entrada  $x(n)$  propuesta, se obtiene multiplicando la *TZ* de la señal de entrada  $X(z)$  por la función de transferencia del sistema  $H(z)$ , y aplicando la *Transformada Z inversa* a dicho producto. Por lo tanto, la *TZ* de la señal de entrada  $x(n)$  está dada por:

$$TZ\{x(n)\} = TZ\{u(n) - \frac{1}{2}u(n-1)\}$$

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{z}{z-1} + \frac{z^{-1}}{2} \frac{z}{z-1} \\
 &= \frac{z-1/2}{z-1} \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

Puesto que  $Y(z) = H(z)X(z)$ , de la ecuación anterior para  $X(z)$  y de la función de transferencia del sistema  $H(z)$ , resulta:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \left( \frac{6z^2}{(z-1/2)(z+1/3)} \right) \left( \frac{z-1/2}{z-1} \right) \\
 Y(z) &= \frac{6z^2}{(z+1/3)(z-1)} \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

Aplicando la *TZ inversa* al resultado anterior para obtener  $y(n)$ , se llega finalmente a la expresión siguiente:

$$y(n) = \frac{9}{2}u(n) + \frac{3}{2}(-1/3)^n u(n)$$

(c) Como la señal  $x(t)$  propuesta es una señal sinusoidal compuesta, se obtiene primeramente la señal muestreada  $x(n)$ , después se calcula la respuesta en frecuencia del sistema  $H(e^{j\omega})$  a partir de  $H(z)$  para cada una de las frecuencias de las componentes de la señal de entrada y, posteriormente, se multiplica dicha respuesta  $H(e^{j\omega})$ , ya evaluada, por cada componente de la señal de entrada, para así obtener la secuencia final  $y(n)$ .

1. Cálculo de la señal muestreada  $x(n)$ . Puesto que  $\Omega_s = 2\pi/T = 2\pi/40$ , se sigue que  $T = 1/40$  seg. Entonces, al muestrear la señal  $x(t)$  cada  $nT$  segundos, resulta:

$$x(n) = x(t)|_{t=nT} = 50 + 10\cos(20\pi nT) + 30\cos(40\pi nT)$$

Sustituyendo el valor de  $T = 1/40$  seg en la expresión anterior, queda la señal muestreada siguiente:

$$x(n) = 50 + 10\cos(\pi n/2) + 30\cos(\pi n)$$

2. Cálculo de las componentes de frecuencia de la señal de entrada  $x(n)$ . Las componentes de frecuencia de la secuencia de entrada  $x(n)$  obtenida anteriormente son:

$$\begin{aligned}
 50 &\rightarrow \omega = 0 \text{ rad/seg} \\
 10\cos(\pi n/2) &\rightarrow \omega = \pi/2 \text{ rad/seg} \\
 30\cos(\pi n) &\rightarrow \omega = \pi \text{ rad/seg}
 \end{aligned}$$

3. Cálculo de la respuesta en frecuencia del sistema  $H(e^{j\omega})$ . La respuesta en frecuencia se obtiene directamente de la función de transferencia del sistema  $H(z)$  evaluada en  $z = e^{j\omega}$ .

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \frac{6e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - e^{j\omega}/6 - 1/6}$$

4. Evaluación de la respuesta en frecuencia del sistema  $H(e^{j\omega})$  en cada una de las componentes frecuenciales de la señal de entrada. La evaluación de la expresión anterior  $H(e^{j\omega})$  en cada componente de frecuencia de la secuencia de entrada es la siguiente:

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = H(e^{j0}) = \left[ \frac{6e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - e^{j\omega}/6 - 1/6} \right]_{\omega=0} = 9$$

$$|H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = 9$$

$$\angle H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = \arctan(0/9) = 0$$

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/2} = H(e^{j\pi/2}) = \left[ \frac{6e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - e^{j\omega}/6 - 1/6} \right]_{\omega=\pi/2} = \frac{36}{7+j}$$

$$|H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/2} = 36/\sqrt{50} = 36/5\sqrt{2} = (36\sqrt{2})/10 = (18\sqrt{2})/5$$

$$\angle H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/2} = \angle H(e^{j\pi/2}) = -\arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = H(e^{j\pi}) = \left[ \frac{6e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - e^{j\omega}/6 - 1/6} \right]_{\omega=\pi} = 6$$

$$|H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 6$$

$$\angle H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \arctan(0/6) = 0$$

5. Finalmente, como todas las componentes de la secuencia de entrada  $x(n)$  son eigenfunciones de sistemas LTI, la respuesta del sistema  $y(n)$  en estado estacionario será:

$$y(n) = 50|H(e^{j0})| + 10|H(e^{j\pi/2})|\cos(\pi n/2 + \angle[H(e^{j\pi/2})]) + \dots \\ \dots + 30|H(e^{j\pi})|\cos(\pi n + \angle[H(e^{j\pi})])$$

Sustituyendo los valores numéricos obtenidos en el paso 4, resulta:

$$y(n) = 450 + \left(\frac{18\sqrt{2}}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right) + 180\cos(\pi n)$$

## 9.6.2 Retardo de Grupo (group delay)

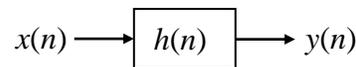
Este parámetro se usa para caracterizar filtros digitales en el dominio de la frecuencia. Proporciona una medida de la linealidad de la fase. La desviación del retardo de grupo con respecto a una constante, indica el grado de no linealidad de la fase. Cuando la fase se especifica como una función continua de  $\omega$ , el retardo de grupo de un sistema se define como:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \quad (9.6.7)$$

donde  $\theta_c(\omega)$  es la función de fase continua (unwrapped). En Matlab, el retardo de grupo puede determinarse mediante la función *grpdelay*.

### Ejemplo 9.6.3

Para el retardador ideal mostrado en la Figura 9.24:



**Figura 9.24** Representación de un sistema retardador ideal:

$$h(n) = \delta(n - n_d)$$

- (h) Obtener la *Transformada Z* del sistema.
- (i) Determinar la respuesta en frecuencia del mismo.
- (j) Bosquejar las gráficas de magnitud, fase y retardo de grupo del retardador propuesto.
- (k) Determinar el retardo de grupo de la salida del sistema  $y(n)$  cuando se le aplica una cierta secuencia de entrada  $x(n)$ .

### Solución.

- (a) La *Transformada Z* del sistema definido por la respuesta al impulso unitario  $h(n)$ , está dada por:

$$TZ\{h(n)\} = TZ\{\delta(n - n_d)\}$$

$$H(z) = z^{-n_d}$$

- (b) La respuesta en frecuencia del retardador se puede obtener mediante la *Transformada Z* evaluada en  $e^{j\omega}$ , como se muestra a continuación:

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

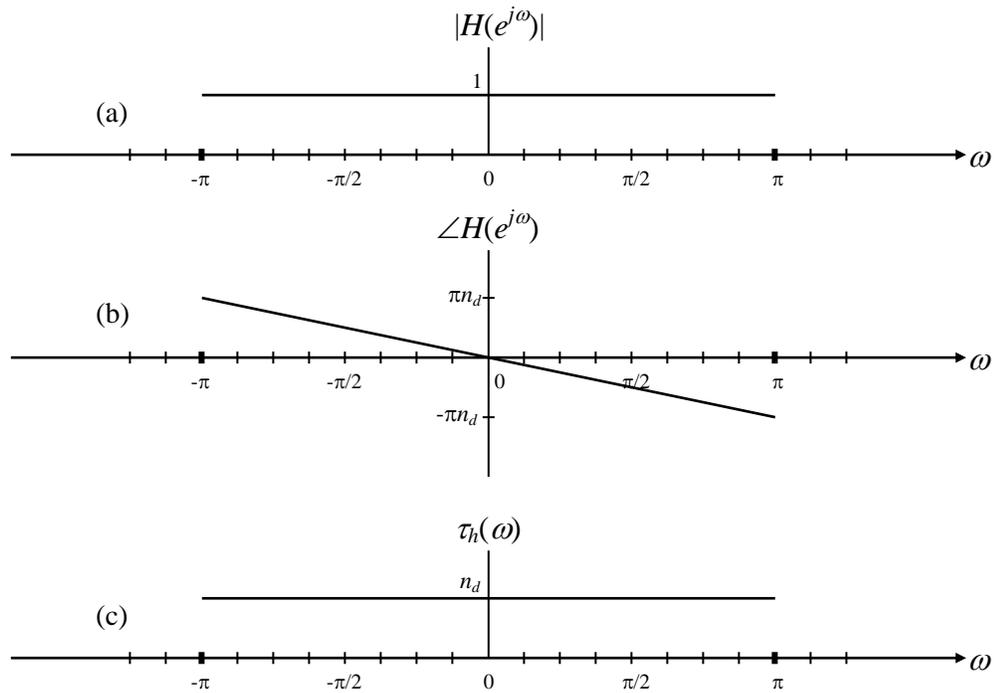
(c) El bosquejo de las gráficas de magnitud, fase y retardo de grupo, se obtienen a partir de la expresión anterior:

Magnitud:  $|H(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega n_d}| = 1$

Fase:  $\angle H(e^{j\omega}) = \angle e^{-j\omega n_d} = -\omega n_d$

Retardo de grupo:  $\tau_h(\omega) = -\frac{d[\angle H(e^{j\omega})]}{d\omega} = -\frac{d(-\omega n_d)}{d\omega} = n_d$

En la Figura 9.25 se muestran las gráficas correspondientes.



**Figura 9.25** Bosquejo de las gráficas de magnitud, fase y retardo de grupo del retardador ideal

*Observaciones:*

1. La respuesta en magnitud es constante para todas las frecuencias  $|\omega| < \pi$ .
2. La respuesta en fase es una función lineal de  $\omega$  para todas las frecuencias,  $|\omega| < \pi$  y la pendiente es  $-n_d$ .
3. La función de retardo de grupo es constante para todas las frecuencias,  $|\omega| < \pi$  y tiene el valor de  $n_d$ .

(d) El retardo de grupo de la salida  $y(n)$  del sistema se calcula a partir de la expresión del retardo de grupo  $\tau_h(\omega)$  obtenida en el inciso (c).

Puesto que:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

y

$$\angle[Y(e^{j\omega})] = \angle[H(e^{j\omega})] + \angle[X(e^{j\omega})]$$

entonces, de la definición de retardo de grupo, se tiene que:

$$\tau_y(\omega) = \tau_h(\omega) + \tau_x(\omega)$$

donde  $\tau_y(\omega)$ ,  $\tau_h(\omega)$  y  $\tau_x(\omega)$ , denotan las funciones de retardo de la salida, del sistema, y de la entrada respectivamente.

Sustituyendo  $\tau_h(\omega) = n_d$  en la expresión anterior, resulta finalmente:

$$\tau_y(\omega) = n_d + \tau_x(\omega)$$

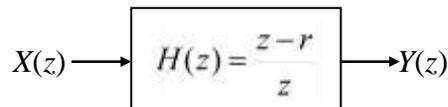
es decir, todas las frecuencias en la entrada  $x(n)$  son retardadas por la misma cantidad ( $n_d$  muestras) al pasar por el sistema; de tal manera que el sistema no introduce distorsión de fase.

*Conclusión:*

Si la respuesta en fase de un sistema es una función lineal de  $\omega$  en la banda de paso, entonces es un sistema de *retardo de grupo constante*. Tales sistemas no introducen distorsión de fase, por lo que son extremadamente útiles en aplicaciones en las que no solamente hay interés en detectar una señal  $x(n)$ , sino en extraerla de una cierta entrada  $s(n)$ .

#### Ejemplo 9.6.4

Obtener las respuestas de magnitud, fase y retardo de grupo para el sistema mostrado en la Figura 9.26, el cual tiene un polo y un cero, y está definido para  $z \neq 0$  y  $|r| < 1$ .



**Figura 9.26** Representación de un sistema discreto con un polo y un cero

**Solución.**

La función de transferencia  $H(z)$  del sistema propuesto se puede re-escribir como:

$$H(z) = 1 - rz^{-1}$$

Por lo tanto la respuesta en frecuencia está dada por:

$$\begin{aligned} H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} &= H(e^{j\omega}) = 1 - re^{-j\omega} \\ &= 1 - r \cos(-\omega) - jr \sin(-\omega) \\ &= 1 - r \cos(\omega) + r \sin(\omega) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$H(e^{j\omega}) = (1 - r \cos(\omega)) + jr \sin(\omega)$$

Las respuesta en magnitud y fase están dadas por:

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{(1 - r \cos(\omega))^2 + r^2 \sin^2(\omega)}$$

$$\angle[H(e^{j\omega})] = \arctan\left[\frac{r \sin(\omega)}{1 - r \cos(\omega)}\right]$$

Para calcular el retardo de grupo se usa la definición dada por:

$$\tau_h(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \angle[H(e^{j\omega})] \right\}$$

Por lo tanto, desarrollando la derivada queda:

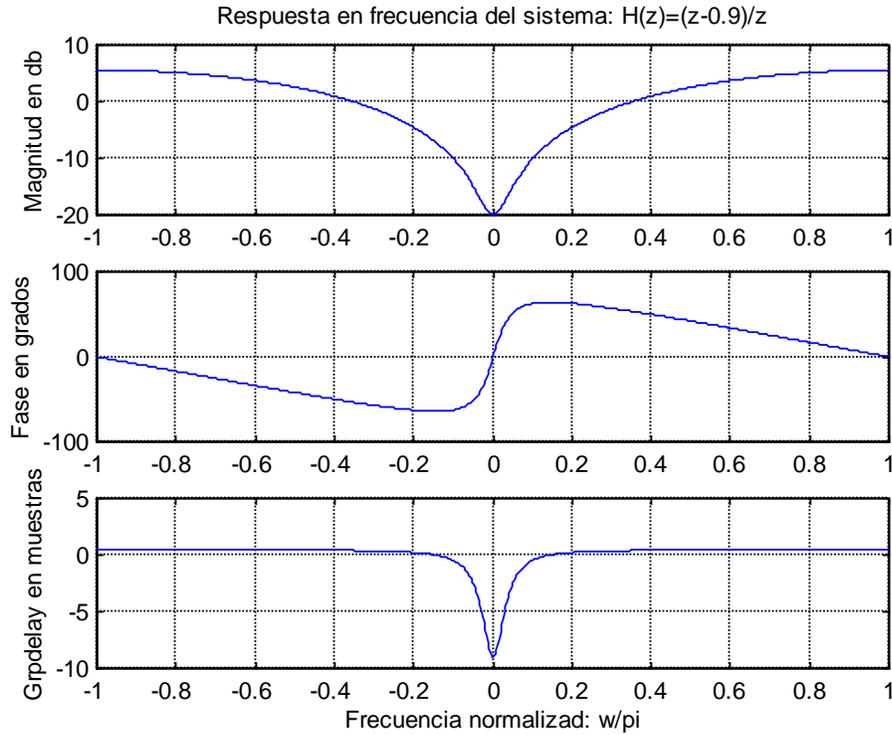
$$\tau_h(\omega) = \left[ \frac{1}{1 + \frac{r^2 \sin^2(\omega)}{(1 - r \cos(\omega))^2}} \right] \left[ \frac{(1 - r \cos(\omega))(r \cos(\omega)) - (r \sin(\omega))(r \sin(\omega))}{(1 - r \cos(\omega))^2} \right]$$

Simplificando la expresión anterior se llega finalmente a:

$$\tau_h(\omega) = \frac{r^2 - r \cos(\omega)}{1 - 2r \cos(\omega) + r^2}$$

Las respuestas en magnitud y fase, así como la función de retardo de grupo, son periódicas con período  $2\pi$ .

Como ejemplo se presentan en la Figura 9.27 las gráficas correspondientes a la magnitud, fase y retardo de grupo del sistema propuesto, con  $r = 0.9$ . Estas gráficas se realizaron en MATLAB con el Programa 9.6.4a que se encuentra en el Apéndice A.

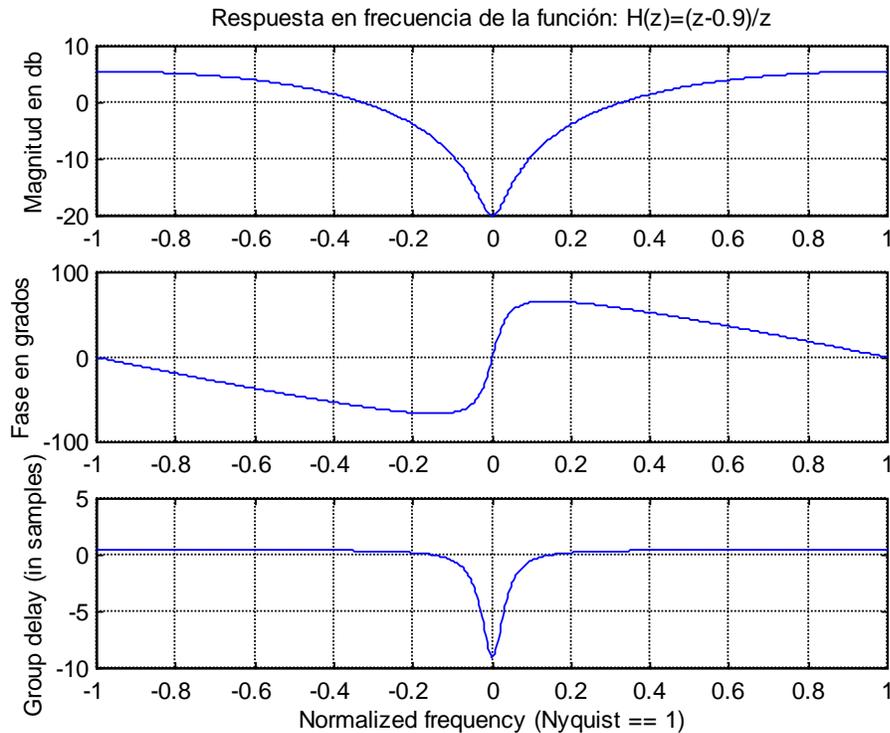


**Figura 9.27** Magnitud, fase y retardo de grupo del sistema  $H(z) = (z - 0.9)/z$

En la Figura 9.28 se muestran las mismas gráficas realizadas en MATLAB con el Programa 9.6.4b que se encuentra en el Apéndice A. En dicho programa se emplea la función *grpdelay* para calcular el retardo de grupo, a diferencia del Programa 9.6.4a, en el cual se graficó directamente la expresión correspondiente al mismo.

*Observaciones:*

1. El sistema es un filtro pasa-altas.
2. Este filtro introduce poca distorsión de fase, puesto que solo las frecuencias cercanas a  $\omega = 0$  son retardadas por cantidades diferentes al pasar por el filtro, como se puede ver de la función de retardo de grupo. Sin embargo, las frecuencias cercanas a  $\omega = 0$  están atenuadas significativamente, por lo que su contribución a la distorsión de fase a la salida del filtro es pequeña.



**Figura 9.28** Magnitud, fase y retardo de grupo del sistema  $H(z)=(z - 0.9)/z$ .

### 9.6.3 Función de transferencia

La TZ de la respuesta al impulso  $h(n)$  de un sistema LTI, se conoce como Función de Transferencia del sistema.

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (9.6.8)$$

### 9.6.4 Estabilidad y Causalidad

Antes de implementar un sistema hay que asegurar que su Función de Transferencia conduzca a una estructura estable. Los filtros digitales *FIR* con coeficientes finitos son siempre estables. Sin embargo, un filtro *IIR* puede ser inestable si no se diseña adecuadamente. Además, un filtro *IIR* que originalmente es estable cuando sus coeficientes tienen precisión infinita, puede convertirse en inestable al cuantificar los coeficientes.

Las condiciones de causalidad y estabilidad se establecen en función de la RDC de los sistemas LTI como se explica a continuación.

Un sistema LTI *causal* debe tener una respuesta al impulso  $h(n)$  que cumpla la condición:

$$h(n) = 0 \quad \text{para } n < 0 \quad (9.6.9)$$

por lo tanto, *para una sistema LTI causal,  $h(n)$  debe ser una secuencia lateral derecha y su RDC será el exterior de un círculo de radio  $r < \infty$ , incluyendo el punto  $z = \infty$ .*

Si un sistema LTI es estable, la respuesta al impulso debe ser absolutamente sumable, es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (9.6.10)$$

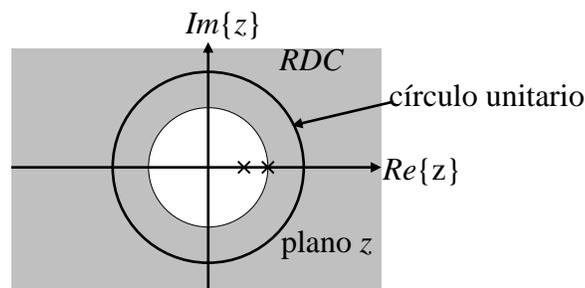
Puesto que la condición (9.6.10) es equivalente a la condición de que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty \quad (9.6.11)$$

para  $|z| = 1$ , *la condición de estabilidad es equivalente a la condición de que la RDC de  $H(z)$  incluya el círculo unitario.*

Como las condiciones de causalidad y estabilidad no se implican la una a la otra, *para asegurar que un sistema LTI sea causal y al mismo tiempo estable, se debe cumplir que todos los polos de  $H(z)$  estén dentro de la circunferencia unidad.*

Lo anterior se debe cumplir debido a que para un sistema causal, su RDC es el exterior del círculo definido por el polo de mayor magnitud y, para que se cumpla la condición de estabilidad, es decir, incluir la circunferencia unidad en la RDC, dicho polo de mayor magnitud, deberá encontrarse dentro de la circunferencia unidad, como se ejemplifica gráficamente en la Figura 9.29.

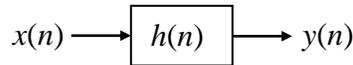


**Figura 9.29** Representación de la RDC para un sistema LTI causal y estable

### Ejemplo 9.6.5

Para el sistema mostrado en la Figura 9.30 y cuya ecuación de su salida  $y(n)$  está dada por:

$$y(n) - \frac{5}{2}y(n-1) + y(n-2) = x(n)$$



**Figura 9.30** Representación de un sistema discreto con respuesta al impulso  $h(n)$ .

- (a) Obtener el diagrama de polos y ceros correspondiente.
- (b) Analizar el diagrama anterior con relación a las posibles *RDC*'s.

#### Solución.

- (a) Para obtener el diagrama de polos y ceros del sistema propuesto, es necesario contar con la expresión de la función de transferencia del mismo, para lo cual se requiere la transformada *Z* de la ecuación para  $y(n)$  que define al sistema, esto es:

$$TZ\left\{y(n) - \frac{5}{2}y(n-1) + y(n-2)\right\} = TZ\{x(n)\}$$

$$Y(z) - \frac{5}{2}z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = X(z)$$

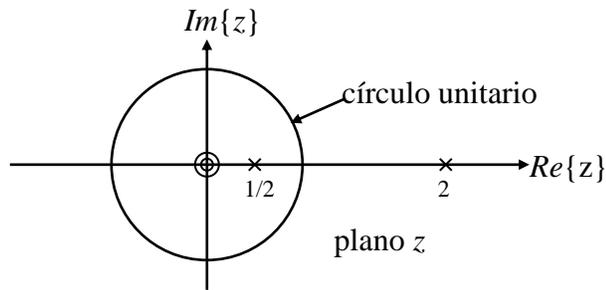
A partir de la expresión anterior se puede escribir la función de transferencia del sistema como:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - (5/2)z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1}{(1 - (1/2)z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \end{aligned}$$

Finalmente queda:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - 1/2)(z - 2)}$$

y el diagrama de polos y ceros de  $H(z)$  se muestra en la Figura 9.31.

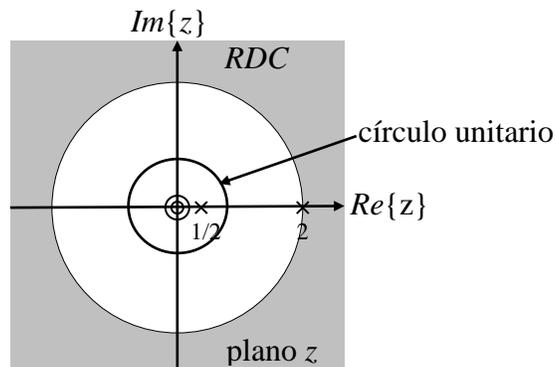


**Figura 9.31** Diagrama de polos y ceros para el sistema:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - 1/2)(z - 2)}$$

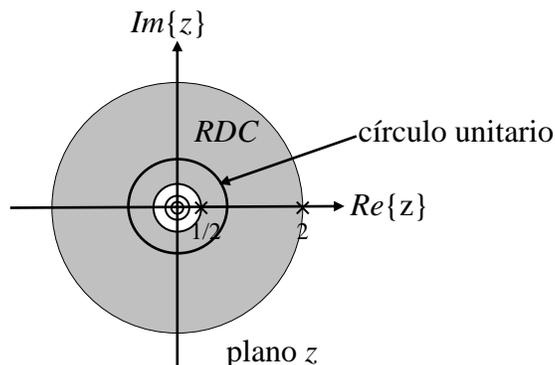
(b) Existen tres posibles *RDC*'s, las cuales se describen a continuación:

1. Si se supone que el sistema es causal, la *RDC* está fuera del polo de mayor magnitud, es decir,  $|z| > 2$ , como se muestra en la Figura 9.32. En este caso el sistema no sería estable puesto que la *RDC* no incluye el círculo unitario.



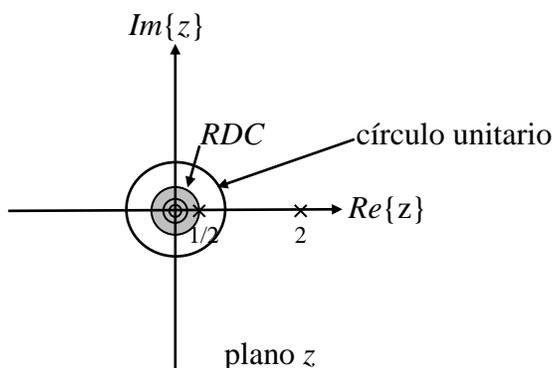
**Figura 9.32** *RDC*:  $|z| > 2$

2. Si se supone que el sistema es estable, entonces la *RDC* será  $1/2 < |z| < 2$ , como se muestra en la Figura 9.33.



**Figura 9.33** *RDC*:  $1/2 < |z| < 2$

3. Para la tercera *RDC* posible definida por  $|z| < 1/2$  como se muestra en la Figura 9.34, el sistema no es estable ni causal.



**Figura 9.34** *RDC*:  $|z| < 1/2$

De lo anterior, si se desea que el sistema sea tanto estable como causal, la *RDC* debe estar fuera del polo de mayor magnitud e incluir el círculo unitario. *Esto requiere que todos los polos de la función de transferencia estén dentro del círculo unitario*, tal y como se muestra en la Figura 9.29.

### 9.6.5 Sistemas Inversos

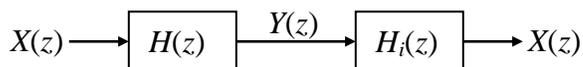
El sistema inverso  $H_i(z)$ , de un sistema  $H(z)$ , es aquel que colocado en cascada con  $H(z)$ , produce la unidad, es decir:

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1 \quad (9.6.12)$$

Esto implica que:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (9.6.13)$$

Si el sistema original  $H(z)$  se coloca en cascada con su inverso  $H_i(z)$ , es posible recuperar la secuencia de entrada, como se muestra en la Figura 9.35.



**Figura 9.35** Conexión en cascada del sistema original  $H(z)$  y su inverso  $H_i(z)$

La condición equivalente en el dominio del tiempo es:

$$g(n) = h(n) * h_i(n) = \delta(n) \quad (9.6.14)$$

La respuesta en frecuencia del sistema inverso, si existe, está dada por:

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} \quad (9.6.15)$$

En forma equivalente, la magnitud, fase y retardo de grupo del sistema inverso, son el recíproco de las funciones correspondientes para el sistema original. No todos los sistemas tienen inverso. Por ejemplo, el filtro ideal pasa-bajas no tiene inverso; no hay manera de recuperar las componentes de frecuencia mayores a la frecuencia de corte que han sido eliminadas por el filtro.

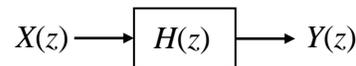
*Comentarios:*

1. Muchos sistemas si tienen inversos; por ejemplo aquellos cuyas funciones de transferencia son funciones racionales.
2. Al proceso de recuperar  $x(n)$  a partir de  $y(n)$ , se le conoce como *deconvolución*.
3. Los ceros de  $H(z)$  se convierten en los polos de  $H_i(z)$ .
4. Para que el sistema inverso exista, las *regiones de convergencia* de  $H(z)$  y  $H_i(z)$  deben traslaparse, por lo que las posibles *RDC's* de  $H_i(z)$  dependen de esta propiedad de traslape.

### Ejemplo 9.6.6

Para el sistema mostrado en la Figura 9.36 y cuya función de transferencia  $H(z)$  está dada por:

$$H(z) = \frac{z-0.5}{z-0.9} \quad |z| > 0.9$$



**Figura 9.36** Representación de un sistema discreto con función de transferencia  $H(z)$ .

Obtener el sistema inverso  $H_i(z)$  y la *RDC* respectiva.

**Solución.**

El sistema inverso está dado por:

$$H_i(z) = \frac{z-0.9}{z-0.5}$$

Existen dos *RDC*'s posibles:  $|z| < 0.5$  y  $|z| > 0.5$ ; sin embargo, de éstas solo  $|z| > 0.5$  satisface la propiedad de traslape con la *RDC* del sistema original ( $|z| > 0.9$ ), por lo que el sistema inverso deseado es:

$$H_i(z) = \frac{z-0.9}{z-0.5} \quad |z| > 0.5$$

Como la *RDC* contiene la circunferencia unidad, el sistema inverso  $H_i(z)$  es causal y estable.

*Observación importante:*

Puesto que los ceros de  $H(z)$  se convierten en los polos de  $H_i(z)$ , se puede concluir que los sistemas LTI estables y causales cuyos polos y ceros están dentro del círculo unitario garantizan tener sistemas inversos estables y causales.

Por otra parte, para que  $H_i(z)$  sea causal, es necesario que  $H(z)$  no tenga un cero en  $\infty$ . Para ilustrar esto, considérese el siguiente ejemplo:

### Ejemplo 9.6.7

Para el sistema cuya función de transferencia  $H(z)$  está dada por:

$$H(z) = \frac{(z-1/2)}{z(z+3/4)} \quad , \quad |z| > 3/4$$

Obtener el sistema inverso  $H_i(z)$  y la *RDC* respectiva.

**Solución.**

El sistema propuesto  $H(z)$  tiene un cero en  $\infty$ , puesto que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 0$$

Entonces, la función de transferencia del sistema inverso está dada por:

$$H_i(z) = \frac{z(z+3/4)}{(z-1/2)}$$

la cual tiene un polo en infinito, puesto que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H_i(z) = \infty$$

Entonces, la *RDC* de  $H_i(z)$  es la región anular  $1/2 < |z| < \infty$ . Se puede ver que esta *RDC* implica que el sistema inverso es estable, pero no causal, puesto que  $H_i(z)$  se puede expresar como:

$$H_i(z) = z + \frac{5z/4}{z-1/2}, \quad 1/2 < |z| < \infty$$

Por lo tanto, obteniendo la *Transformada Z inversa*, resulta una respuesta al impulso dada por:

$$h_i(n) = \delta(n+1) + (5/4)(1/2)^n u(n)$$

que claramente es un sistema no causal.

### 9.6.6 Respuesta en frecuencia de un cero complejo

Para estudiar el comportamiento en frecuencia de un cero complejo, se puede analizar la función de transferencia dada a continuación:

$$H(z) = 1 - re^{j\theta} z^{-1} \quad (9.6.16)$$

Como ejemplo, la gráfica de la magnitud, fase y retardo de grupo de la función anterior, se realizó en MATLAB con el Programa 9.6.6 que se encuentra en el Apéndice A, con  $r = 0.9$  y  $\theta = \pi/2$ , y un rango de frecuencia definido por el intervalo  $0 < \omega < 2\pi$ . Para dicho programa la expresión (9.6.16) se re-escribe como se muestra a continuación:

$$H(z) = \frac{1 - j0.9z^{-1}}{1} \quad (9.6.17)$$

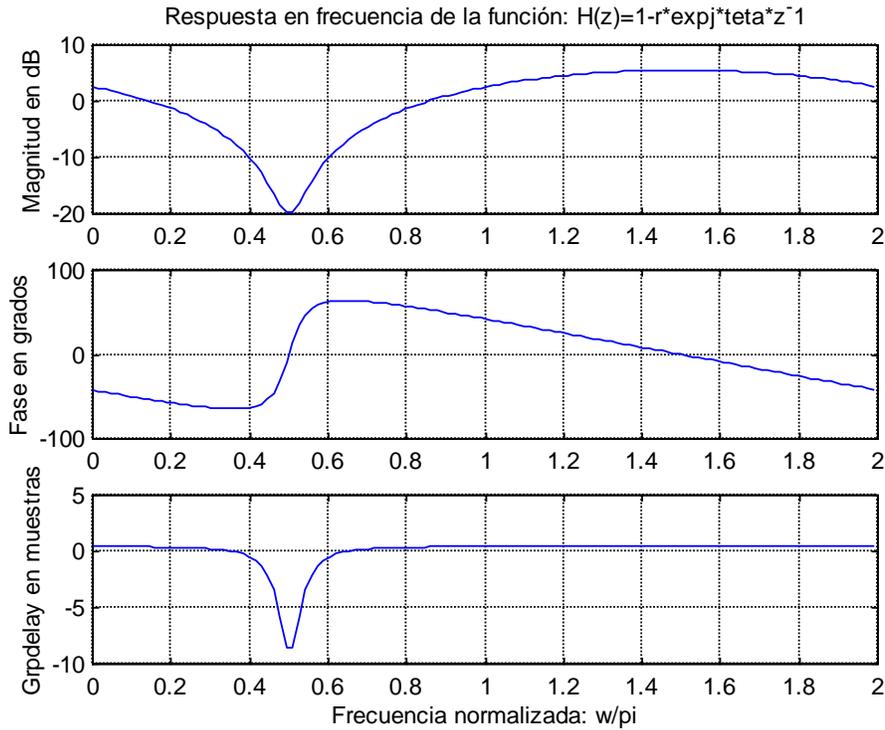
La gráfica resultante se presenta en la Figura 9.37.

NOTA: Si  $H(z)$  tiene coeficientes reales, se puede usar la función *grpdelay* para calcular el retardo de grupo en el intervalo  $0 < \omega < \pi$ . Si  $H(z)$  tiene coeficientes complejos, se puede usar la función *grpdelay* para calcular el retardo de grupo en el intervalo  $0 < \omega < 2\pi$ .

*Observaciones:*

1. Es importante notar que la respuesta en magnitud de la Figura 9.37 no es una función par con respecto a  $\omega = 0$ , y que la respuesta en fase no es una función impar con respecto a  $\omega = 0$ . Esto se debe a que los coeficientes de la función de

transferencia de  $H(z)$  no son reales.



**Figura 9.37** Respuesta en frecuencia de la magnitud, fase y retardo de grupo de un cero complejo:  $H(z)=1 - re^{j\theta}z^{-1}$ , con  $r = 0.9$  y  $\theta = \pi/2$

2. De la Figura 9.37 se puede observar que las señales que se procesan a través del sistema experimentarán poca distorsión de fase, ya que el retardo de grupo es *plano* (constante) en la mayor parte de las frecuencias de interés, en la banda de frecuencias de  $0 < \omega < 2\pi$ . Por otra parte, las señales de entrada son atenuadas por aproximadamente 20 dB cerca de las frecuencias en que se introduce la distorsión de fase.
3. Obsérvese que la respuesta en magnitud tiene un nulo en  $\pi/2$ , que corresponde a la ubicación del cero de  $H(z)$ .

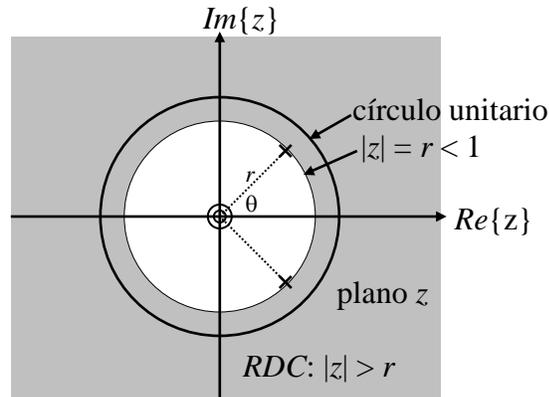
### 9.6.7 Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

Considere el sistema causal de segundo orden definido por:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2r\cos(\theta)z + r^2} \quad |z| > r \quad (9.6.18)$$

donde:  $0 < r < 1$  y  $0 < \theta < \pi$ . El diagrama de polos y ceros se muestra en la Figura 9.38, en donde se ve que el sistema tiene un polo en  $z = re^{j\theta}$  y su conjugado en  $z = re^{-j\theta}$ , y dos ceros en  $z = 0$ . También se observa que el sistema es estable, puesto que su *RDC* incluye el

círculo unitario.



**Figura 9.38** Diagrama de polos y ceros de un sistema de segundo orden

La ecuación de diferencias de este sistema está dada por:

$$y(n) - 2r \cos(\theta)y(n-1) + r^2 y(n-2) = x(n) \quad (9.6.19)$$

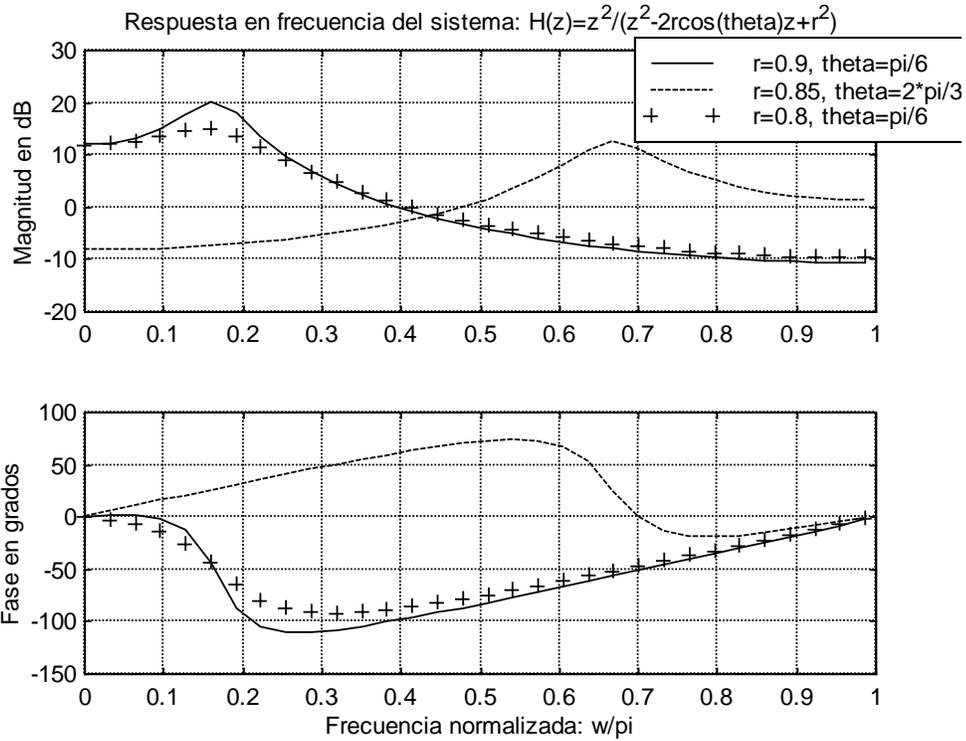
La respuesta al impulso del mismo está dada por:

$$h(n) = \frac{r^n \sin[\theta(n+1)]}{\sin(\theta)} u(n) \quad (9.6.20)$$

La respuesta en frecuencia para la magnitud y fase se obtuvo en MATLAB mediante el Programa 9.6.7 que se encuentra en el Apéndice A, y las gráficas correspondientes se muestran en la Figura 9.39.

De la Figura 9.39 se observa que  $H(z)$  definida en (9.6.18) representa un filtro pasa-banda, cuya frecuencia central depende de la ubicación del par de polos conjugados (es decir, del ángulo  $\theta$  en la Figura 9.38), y cuyo ancho de banda depende de la distancia del par de polos conjugados a partir del origen (es decir,  $r$  en la Figura 9.38). Se observa que entre mas cercano esté el par de polos al círculo unitario, menor será el ancho de banda (o mayor Q) del sistema.

Nota: Puesto que los coeficientes de  $H(z)$  son reales, las respuestas de magnitud y fase son funciones par e impar con respecto a  $\omega = 0$ , respectivamente. Se deja al estudiante que lo compruebe modificando el programa en MATLAB correspondiente.



**Figura 9.39** Respuestas de magnitud, fase y retardo de grupo del sistema de segundo orden:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2r \cos(\theta)z + r^2} \quad |z| > r$$

### 9.6.8 Esbozo de las respuestas de magnitud y fase

Algunas veces, es conveniente estimar las respuestas de magnitud y fase directamente del diagrama de polos y ceros de la función de transferencia. Para ello, se presenta a continuación un procedimiento basado en la geometría que forman los polos y ceros de la función de transferencia.

Partiendo de la función de transferencia general mostrada a continuación:

$$H(z) = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_m}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (9.6.21)$$

donde los coeficientes  $b_j$  y  $a_j$  son reales, se re-escribe dicha función de manera que se pueda expresar en función de los polos y ceros como:

$$H(z) = b_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} \quad (9.6.22)$$

La respuesta en frecuencia de la expresión anterior es:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 \frac{(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \cdots (e^{j\omega} - z_M)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2) \cdots (e^{j\omega} - p_N)} \quad (9.6.23)$$

Al proponer las siguientes equivalencias:

$$e^{j\omega} - z_m = B_m e^{j\alpha_m} \quad (9.6.24)$$

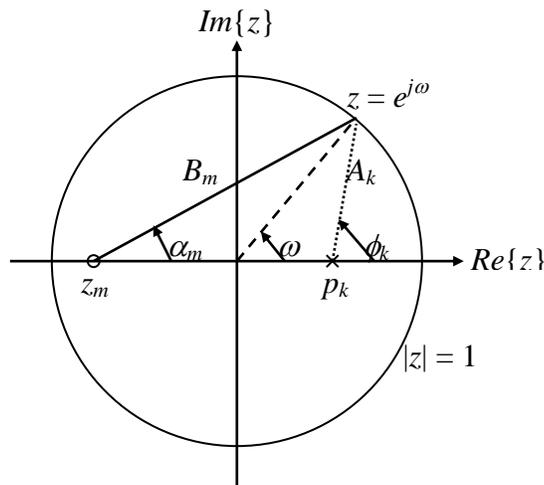
y

$$e^{j\omega} - p_k = A_k e^{j\phi_k} \quad (9.6.25)$$

y sustituyéndolas en (9.6.23), la respuesta en frecuencia quedará expresada como:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 \frac{B_1 e^{j\alpha_1} \cdot B_2 e^{j\alpha_2} \cdots B_M e^{j\alpha_M}}{A_1 e^{j\phi_1} \cdot A_2 e^{j\phi_2} \cdots A_N e^{j\phi_N}} \quad (9.6.26)$$

Geoméricamente la expresión obtenida en (9.6.26) se muestra en la Figura 9.40. Los ángulos  $\alpha_m$  y  $\phi_k$  son positivos si se miden a partir del eje real de  $z$  y en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.



**Figura 9.40** Esbozo para medir magnitudes y ángulos

La magnitud de la respuesta en frecuencia dada en (9.6.26) se calcula como:

$$|H(e^{j\omega})| = b_0 \frac{B_1 \cdot B_2 \cdots B_M}{A_1 \cdot A_2 \cdots A_N} \quad (9.6.27)$$

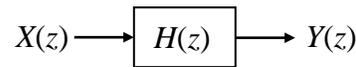
y la fase queda expresada de la siguiente forma:

$$\angle[H(e^{j\omega})] = \sum_{m=1}^M \alpha_m + \sum_{k=1}^N \phi_k \quad (9.6.28)$$

Con el procedimiento anterior se concluye que es posible estimar la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros, con solo medir las longitudes de los vectores  $B_m$  y  $A_k$ , con sus ángulos correspondientes  $\alpha_m$  y  $\phi_k$ .

### Ejemplo 9.6.8

Hacer un esbozo de las respuestas de magnitud y fase usando los puntos  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi/2$  y  $\omega = \pi$ ; para el sistema que se muestra en la Figura 9.41

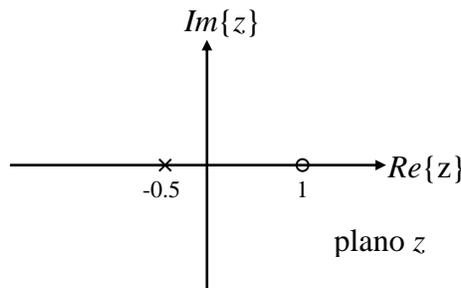


**Figura 9.41** Representación de un sistema discreto con la

función de transferencia:  $H(z) = \frac{z-1}{z+0.5} \quad |z| > 0.5$

#### Solución.

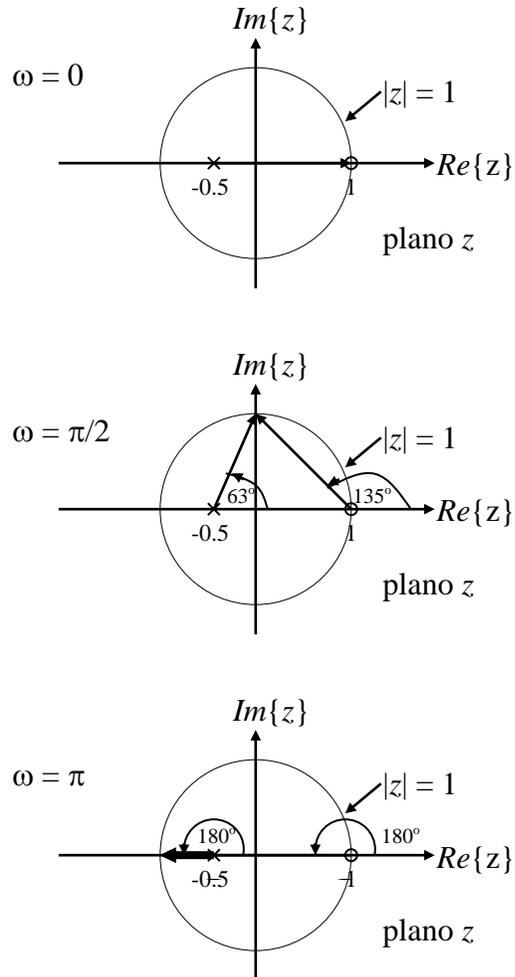
Por analogía con la expresión de la función de transferencia general dada en (9.6.21) y la función de transferencia propuesta, se observa que  $b_0 = 1$ . Con este dato se pueden localizar los ceros y polos de la función de transferencia en el plano  $z$ , como se muestra en la Figura 9.42.



**Figura 9.42** Polos y ceros del sistema discreto con función de transferencia:

$$H(z) = \frac{z-1}{z+0.5} \quad |z| > 0.5$$

La construcción geométrica para cada frecuencia propuesta se muestra en la Figura 9.43.



**Figura 9.43** Construcción geométrica para el bosquejo de las gráficas de magnitud y fase

De la Figura 9.43 y de las expresiones (9.6.27) y (9.6.28), se obtendrán las magnitudes y fases de la función de transferencia para cada uno de los valores de la frecuencia  $\omega$ . A continuación se presentan los cálculos correspondientes para cada frecuencia:

(1)  $\omega = 0$ :  $B_1 = 0$ ;  $A_1 = 3/2$ ;  $\phi_1 = 0$ .

$$|H(e^{j0})| = \frac{0}{(3/2)} = 0; \quad \angle[H(e^{j0})] = 0^\circ - 0^\circ = 0^\circ$$

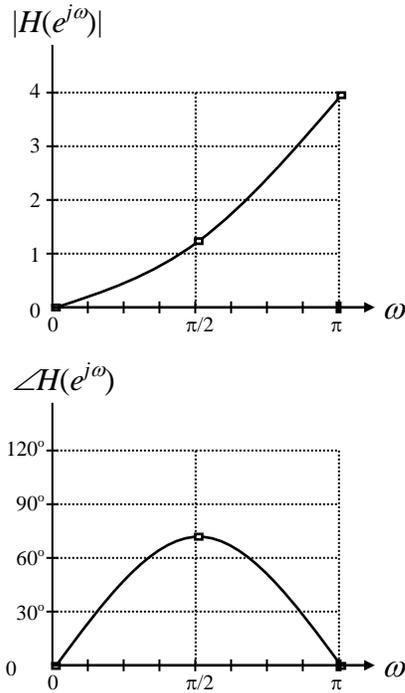
(m)  $\omega = \pi/2$ :  $B_1 = \sqrt{2}$ ;  $A_1 = \sqrt{5/2}$ ;  $\alpha_1 = 135^\circ$ ;  $\phi_1 = 63^\circ$

$$|H(e^{j\pi/2})| = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{5/2})} = 1.265; \quad \angle[H(e^{j\pi/2})] = 135^\circ - 63^\circ = 72^\circ$$

(n)  $\omega = \pi$ :  $B_1 = 2$ ;  $A_1 = 1/2$ ;  $\alpha_1 = 180^\circ$ ;  $\phi_1 = 180^\circ$ .

$$|H(e^{j\pi})| = \frac{2}{(1/2)} = 4; \quad \angle[H(e^{j\pi})] = 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$$

Estos datos se usan para esbozar las respuestas de magnitud y fase que se muestran en la Figura 9.44, en donde se observa que  $H(z)$  es un filtro pasa-altas.



**Figura 9.44** Esbozo de las respuestas en magnitud y fase para el filtro

$$H(z) = \frac{z-1}{z+0.5} \quad |z| > 0.5$$

## 9.7 Pares de Transformadas Z de uso más frecuente

En la Tabla 9.2 se presentan algunos pares de *Transformadas Z* de uso más frecuente.

Secuencia	Transformada Z	RDC
$\delta(n)$	1	cualquier $z$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$\delta(n-m)$	$z^{-m}$	cualquier $z$ excepto 0 (si $m > 0$ ) ó $\infty$ (si $m < 0$ )
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  <  a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z  > 0$
$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-(\cos \omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$(\sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{(\sin \omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$

**Tabla 9.2** Algunos pares de *Transformadas Z* de uso más frecuente